

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

٢٠١٦-٢٠١٧ م







جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى | كتاب الطالب | الفصل الدراسى الأول

تأليف

الأستاذ/ عمر فؤاد جاب الله

الأستاذ الدكتور/ عفاف أبو الفتوح صالح
الدكتور/ عصام وصفى روفائيل

الأستاذ/ سيرافيم الياس اسكندر
الأستاذ/ كمال يونس كبشة

إشراف علمى
مستشار الرياضيات
إشراف تربوى
مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

طبعة: ٢٠١٦-٢٠١٧ م

الاسم:..

المدرسة:..

الفصل:..

العنوان:..

العام الدراسى:....................................

مقدمة الكتاب

أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات: يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص، واختيار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى يوجد نماذج اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى: العلاقات و الدوال

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

الإحصاء

الوحدة الثالثة : الإحصاء



حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية

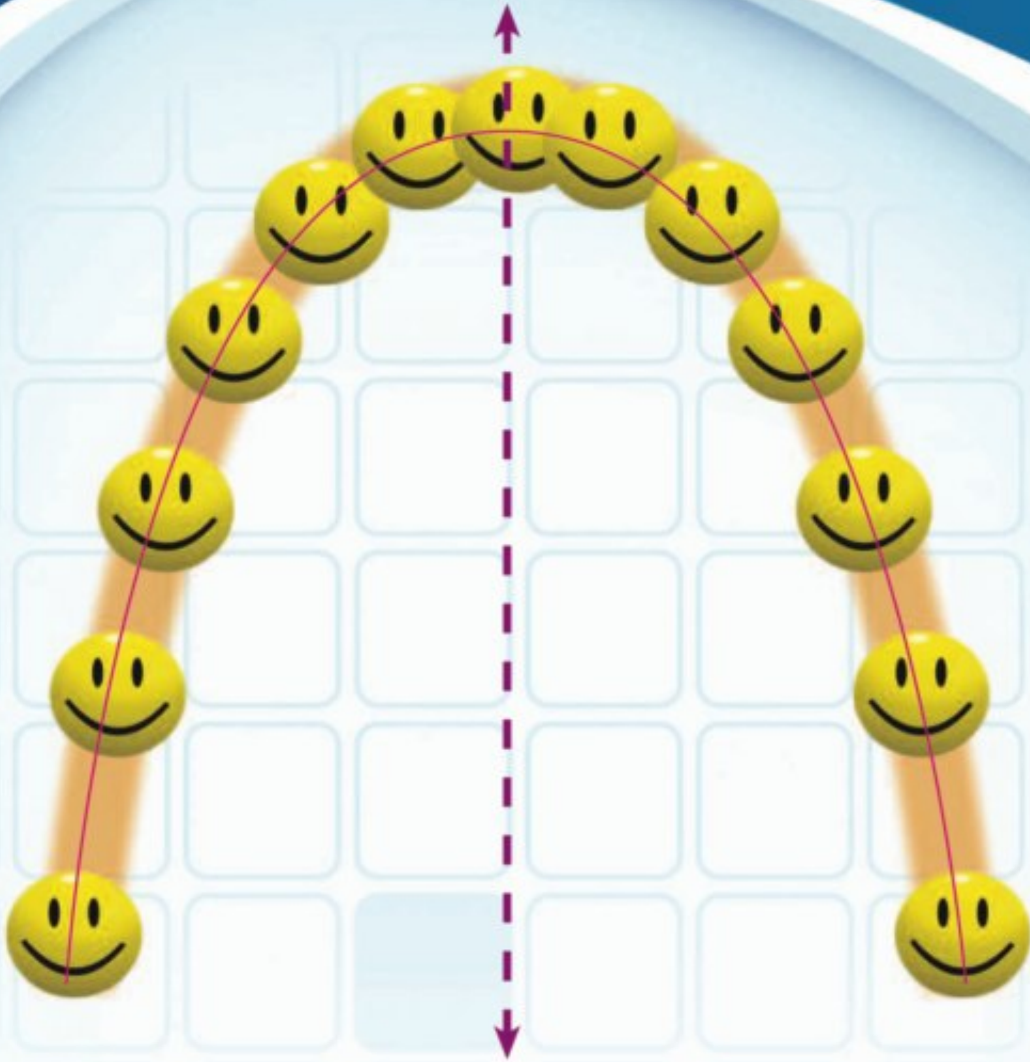
الأنشطة والتدريبات

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الاعداد الطبيعية	⊥	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
√	الجذر التربيعى للعدد أ	ق (∠ أ)	قياس زاوية أ
∛	الجذر التكعيبى للعدد أ	ق ($\frown$أ ب)	قياس القوس أ ب
[أ ، ب]	فترة مغلقة	~	تشابه
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	<	أكبر من
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة	⩽	أكبر من أو تساوى
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة	>	أقل من
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	⩾	أقل من أو تساوى
≡	تطابق	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ	$\overline{\text{س}}$	الوسط الحسابى
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف العيارى
		مجـ أو Σ	المجموع

الجبر

العلاقات و الدوال



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.

هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

١ - ١ حاصلُ الضّربِ الديكارتي

سوف تتعلم

☆ كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين.

مصطلحات أساسية

☆ زوجٌ مرتبٌ
☆ حاصلُ ضرب ديكارتي .
☆ مخططٌ سهمي .
☆ مخطط بياني
☆ علاقة .

فكر وناقش

سبق وأن درست العلاقة بين متغيرين س، ص.

١ أوجد مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تُحقِّق العلاقة:
ص = ٢ س - ١ عندما س = ٠، س = ١، س = ٢

٢ مثِّل هذه الأزواجَ المرتبة بيانيًا في المستوى الإحداثي.

٣ هل الزوجُ المرتب (٣، ٥) يساوي الزوج المرتب (٥، ٣)؟ (استعن بالرسم).

مما سبق نلاحظ:

١ في الزوج المرتب (أ، ب) يسمى أ بالمسقط الأول، ب بالمسقط الثاني.

٢ كلُّ زوجٍ مرتبٍ يمثلُ بنقطةٍ واحدةٍ وواحدة فقط في المستوى الإحداثي.

٣ **إذا كان** أ ≠ ب **فإن** (أ، ب) ≠ (ب، أ)، لماذا ؟

٤ (أ، ب) ≠ {أ، ب}.

٥ **إذا كان** (أ، ب) = (س، ص) **فإن** أ = س، ب = ص

مثال ١

أوجد س، ص إذا كان : (س -٢، ٣) = (٥، ص + ١)

الحل

س - ٢ = ٥ ∴ س = ٧ ، ٣ = ص + ١ ∴ ص = ٢

تدرب

أوجد أ، ب في كلٍّ مما يأتي:

أ (أ، ب) = (-٥، ٩)

ب (أ - ٢، ب + ١) = (٢، -٣)

جـ (٦، ب - ٣) = (٢ - أ، - ١)

د (أ - ٧، ٢٦) = (-٢، ب^{٣} - ١)

1-1

مثال ٢

إذا كانت سـ = {أ، ب}، صـ = {-١، ٠، ٣} **فأوجد:**

سـ × صـ ، صـ × سـ، **ماذا تلاحظ؟**

الحل

لإيجاد حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة صـ ويُرمز له بالرمز سـ × صـ، نكتب مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصرٌ من سـ، ومسقطها الثانى عنصرٌ من صـ فيكون:

سـ × صـ = {أ، ب} × {-١، ٠، ٣} = {(أ، -١)، (أ، ٠)، (أ، ٣)، (ب، -١)، (ب، ٠)، (ب، ٣)}

كما أن: صـ × سـ = {-١، ٠، ٣} × {أ، ب} = {(-١، أ)، (-١، ب)، (٠، أ)، (٠، ب)، (٣، أ)، (٣، ب)}

نلاحظ أن : سـ × صـ ≠ صـ × سـ

ويمكن الحصول على سـ × صـ، صـ × سـ من الجدولين الآتيين:

×		المسقط الثاني		
		-١	٠	٣
المسقط الأول	أ	(أ، -١)	(أ، ٠)	(أ، ٣)
	ب	(ب، -١)	(ب، ٠)	(ب، ٣)

×		المسقط الثاني	
		أ	ب
المسقط الأول	-١	(-١، أ)	(-١، ب)
	٠	(٠، أ)	(٠، ب)
	٣	(٣، أ)	(٣، ب)

فكر:

١ متى يكون سـ × صـ = صـ × سـ؟

٢ هل عدد عناصر سـ × صـ = عدد عناصر صـ × سـ؟

ملاحظات:

١ **إذا كانت** سـ، صـ مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين،
فإن: سـ × صـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ صـ}

٢ سـ × صـ ≠ صـ × سـ **حيث:** سـ ≠ صـ

ن (سـ × صـ) = ن (صـ × سـ) = ن (سـ) × ن (صـ)

حيث ن ترمز إلى عددِ عناصر المجموعة.

٣ **إذا كان** (ك، م) ∈ سـ × صـ **فإن** ك ∈ سـ، م ∈ صـ

٤ **إذا كانت** سـ مجموعةً غير خاليةٍ
فإن: سـ × سـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ}
و تكتب أحيانًا $سـ^{٢}$ وتقرأ (سـ اثنين).



مثال ٣

إذا كانت $س = \{1\}$، $ص = \{2، 3\}$، $ع = \{2، 5، 6\}$ مثّل المجموعات س، ص، ع بشكل ﭬن ثم أوجد:

أولاً: (أ) $س \times ص$ (ب) $ص \times ع$ (جـ) $س \times ع$ (د) $ص^2$

ثانيًا: $(س \times ص) \cup (ص \times ع)$ ثالثًا: $س \times (ص \cap ع)$

رابعًا: $(س \times ص) \cap (س \times ع)$ خامسًا: $(ع - ص) \times (س \cup ص)$

الحل



أولاً:

(أ) $س \times ص = \{1\} \times \{2، 3\} = \{(1، 2)، (1، 3)\}$

(ب) $ص \times ع = \{2، 3\} \times \{2، 5، 6\}$

$= \{(2، 2)، (2، 5)، (2، 6)، (3، 2)، (3، 5)، (3، 6)\}$.

(جـ) $س \times ع = \{1\} \times \{2، 5، 6\} = \{(1، 2)، (1، 5)، (1، 6)\}$

(د) $ص^2 = ص \times ص = \{2، 3\} \times \{2، 3\}$

$= \{(2، 2)، (2، 3)، (3، 2)، (3، 3)\}$

ثانيًا: $(س \times ص) \cup (ص \times ع) = \{(1، 2)، (1، 3)، (2، 2)، (2، 5)، (2، 6)، (3، 2)، (3، 5)، (3، 6)\}$

ثالثًا: $س \times (ص \cap ع) = \{1\} \times \{2\} = \{(1، 2)\}$

رابعًا: $(س \times ص) \cap (س \times ع) = \{(1، 2)، (1، 3)\} \cap \{(1، 2)، (1، 5)، (1، 6)\} = \{(1، 2)\}$.

خامسًا: $ع - ص = \{5، 6\}$ ∴ $(ع - ص) \times (س \cup ص) =$ أكمل



إذا كانت $س = \{2، -1\}$، $ص = \{4، 0\}$، $ع = \{4، 5، -2\}$ أوجد

(أ) $س \times ص$ (ب) $ص \times ع$ (جـ) $س^2$

(د) ن $(س \times ع)$ (هـ) ن $(ص^2)$ (و) ن $(ع^2)$

تمثيلُ حاصلِ الضرب الديكارتي:



مثال ٤

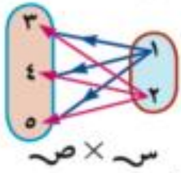
(١) إذا كانت $س = \{1، 2\}$، $ص = \{3، 4، 5\}$ **أوجد:** $س \times ص$، ومثله:

أولاً: بالمخطط السَّهمي. ثانيًا: بالمخطط البياني.

الحل

س × ص = {١، ٢} × {٣، ٤، ٥} = {(١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)}

ويمثل حاصل الضرب الديكارتي س × ص بمخطط سهميٍّ أو شبكة بيانية، كما يلي:

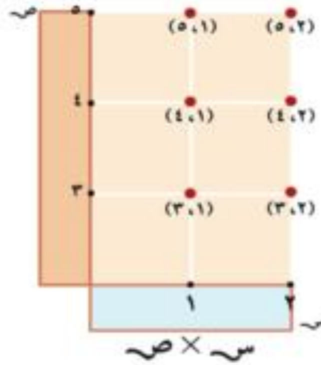


أولاً: المخطط السهمي

نرسم سهمًا من كلِّ عنصرٍ يمثلُ المسقطَ الأول (وهي عناصرُ المجموعة س)

إلى كلِّ عنصرٍ يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة ص)

أي أن: المخططُ السهميُّ لحاصلِ الضرب الديكارتي يُمثِّل كلّ زوجٍ مرتبٍ بسهمٍ يخرج من مسقطه الأول وينتهي عند مسقطه الثاني.



ثانيًا: المخططُ البياني (الشبكةُ البيانيةُ المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة س أفقيًا، وعناصر المجموعة ص رأسيًا فتكون نقطُ تقاطع الخطوط الأفقية والرأسيَّة تمثل الأزواج المرتبة لعناصرِ حاصل الضرب الديكارتي س × ص.

مثال ٥

إذا كانت س = {٣، ٤، ٨} فأوجد س × س ومثِّله بمخططٍ سهميٍّ.

الحل



س × س = {٣، ٤، ٨} × {٣، ٤، ٨}

={(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٨)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٨)، (٨، ٣)، (٨، ٤)، (٨، ٨)}.

ويلاحظ في الشكلِ : قد مُثلت الأزواجُ المرتبةُ بأسهم، وأن الأزواجَ المرتبة التي فيها المسقطُ الأول يساوي المسقطَ الثاني مثل (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٨، ٨) مُثلت بعروةٍ لتدل على أن السهمَ يخرجُ من النقطةِ، وينتهي عند نفس النقطة.

لاحظ أن: ن (س) = ٣ فتكون: ن (س × س) = ٣ × ٣ = ٩

وفي هذه الحالةِ يمثل حاصل الضرب الديكارتي س × س بيانيًا بتسع نقاطٍ، وكلُّ نقطةٍ تمثِّل زوجًا مرتبًا.

أما إذا كانت س مجموعةً غيرَ منتهيةٍ (لا يمكن حصر عدد عناصرها) فإن:

عدد عناصر س × س يكون غير منته.

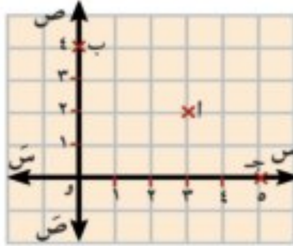
فكر: كيف يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لكل من:

ط × ط، ص × ص، ن × ن، ح × ح

مطابع الشركة القومية للتوزيع

حاصلُ الضرب الديكارتي للمجموعاتِ غير المنتهية والتَّمثيل البياني له.

أولاً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي ط × ط = {(س، ص) : س ∈ ط، ص ∈ ط}



١ نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما $\overleftrightarrow{\text{س سَ}}$ أفقيًّا والآخر $\overleftrightarrow{\text{ص صَ}}$ رأسيًّا ومتقاطعين في النقطة و.

٢ نمثل الأعدادَ الطَّبيعية ط على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي مبتدئين بالنقطة (و) التي تمثل العددَ صفر.

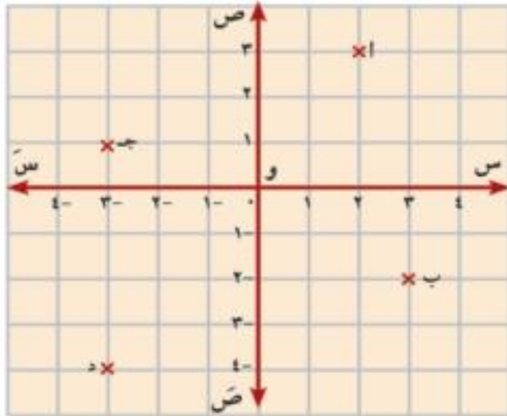
٣ ترسم مستقيماتٌ رأسيةٌ وأخرى أفقيةٌ من النقطِ التي تمثل الأعدادَ الطَّبيعية ، سوف نحصل على الشكلِ المقابلِ، وتكون نقطُ التقاطع لمجموعة هذه المستقيمات ممثلةً للشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي ط × ط.

لاحظ أن: كلُّ نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ط × ط.

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، ٢)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٠، ٤)

أكمل: النقطة جـ تمثل الزوج المرتب (،   )، النقطة و تمثل الزوج المرتب (،   )

ثانيًا: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ = {(س، ص): س ∈ صـ، ص ∈ صـ}.



نمثل مجموعةَ الأعدادِ الصَّحيحة على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

فتكون كلُّ نقطةٍ من نقط الشبكة تمثِّل أحدَ الأزواج في حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ.

وتعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثي صـ × صـ

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢،٣)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٣،-٢)

مطابع الشركة القومية للتوزيع



ثالثًا: لتمثيلِ حاصل الضرب الديكارتي ن × ن = {(س، ص) : س ∈ ن، ص ∈ ن}

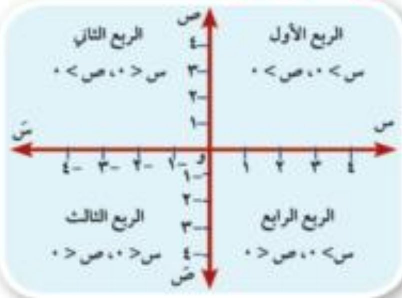
ارسم شبكةً بيانيةً متعامدةً ومثل مجموعةَ الأعدادِ النسبية ن على المستقيمين الأفقي والرأسي، ثم عيِّن عليها النقط: أ $(٣، \frac{٥}{٢})$، ب $(-\frac{٣}{٢}، ٤)$، جـ $(-٣، -\frac{٣}{٢})$، د $(\frac{٥}{٢}، -\frac{٣}{٢})$

رابعًا: تمثيل حاصل الضرب الديكارتي ع × ع = {(س، ص) : س ∈ ع، ص ∈ ع}

حيث تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي، كما تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

يسمى المستقيم الأفقي $\overleftrightarrow{س سَ}$ محور السينات، ويسمّى المستقيم الرأسي $\overleftrightarrow{ص صَ}$ محور الصادات

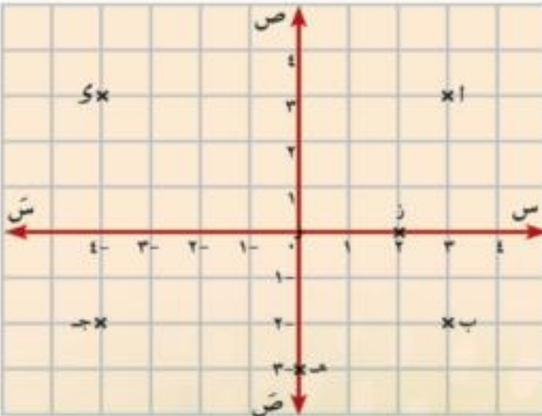
فتنقسم الشبكةُ إلى أربعةِ أقسامٍ (أرباع) كما بالشَّكل المقابل:





كوِّن شبكةً تربيعيةً متعامدةً لحاصِل الضرب الديكارتي ع × ع ثم اذكر الربعَ الذي تقعُ فيه أو المحور الذي ينتمي إليه كل من النقط الآتية:

أ (٣، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٤، -٢)، د (-٤، ٣)، هـ (٠، -٣)، ز (٢، ٠)



الحل

أ (٣، ٣)	تقع في الربع الأول
ب (٣، -٢)	تقع في الربع الرابع
جـ (-٤، -٢)	تقع في الربع الثالث
د (-٤، ٣)	تقع في الربع الثاني
هـ (٠، -٣)	تقع على محور الصادات
ز (٢، ٠)	تقع على محور السينات.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

١ - ٢

العلاقات



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة س إلى مجموعة ص.
- ☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة إلى نفسها.

مصطلحات أساسية

- ☆ علاقة.
- ☆ بيان العلاقة.

فكر وناقش



في مهرجان القراءة للجميع ذهب خمسةُ تلاميذ يمثلون المجموعة س = {أ، ب، جـ، د، هـ} إلى مكتبةِ المدرسة لقراءة بعضِ الكتب التي تمثلها المجموعةُ ص = {علوم، أدب، ثقافة، تاريخ}. فقرأ التلميذ (أ) كتابًا من كتب العلوم، وكتابًا من كتب الثقافة، وقرأ التلميذ (ب) كتابًا من كتب التاريخ، وقرأ التلميذ (جـ) كتابًا أدبيًّا، وقرأ التلميذ (هـ) كتابًا من كتب التاريخ، ولم يقرأ التلميذ (د) أيًّا من هذه الكتب.

١ اكتب العبارات السابقةَ في صورة أزواج مرتبة من س إلى ص.

٢ مثِّل مجموعة الأزواج المرتبة السابقة في صورة مخطط سهمي.

لاحظ أن: التعبير «قرأ» قد ربط بين بعض عناصر المجموعة س ببعض عناصر المجموعة ص أي أن التعبير «قرأ» يعين علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص وسنرمز لها عادة بالرمز ع وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمخططٍ سهميٍّ كالمبين بالشكل المقابل، حيث نرسمُ سهمًا يبدأ من التلميذِ، وينتهي عند نوع الكتب التي قرأها.



كما نستطيع أن نعبر عن العلاقة من س إلى ص بمجموعة الأزواج المرتبة الآتية:

{(أ، علوم)، (أ، ثقافة)، (ب، تاريخ)، (جـ، أدب)، (هـ، تاريخ)}.

هذه المجموعةُ من الأزواجِ المرتبة تسمىّ بيان العلاقة ع.

فكّر: هل بيان العلاقة ع مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي س × ص؟



مثال ١

إذا كانت س = {-١، ١، ٢}، ص = {٢، ٤، ٦، ٨}، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «ب = ٢ أ + ٤»، لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

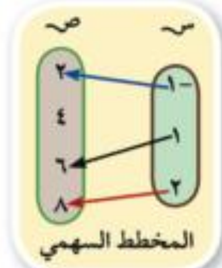
الحل

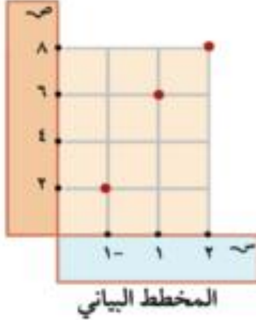
عندما أ = -١ ∴ ب = ٢ × (-١) + ٤ = ٢

عندما أ = ١ ∴ ب = ٢ × ١ + ٤ = ٦

عندما أ = ٢ ∴ ب = ٢ × ٢ + ٤ = ٨

∴ ع = {(-١، ٢)، (١، ٦)، (٢، ٨)}





مما سبق نستنتج أن

① العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص حيث س، ص مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص.

② بيان العلاقةِ من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعةُ الأزواج المرتَّبة حيث المسقطُ الأول في كلٍّ منها ينتمي إلى المجموعة س ، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة ص.

③ إذا كانت ع علاقةً من مجموعة س إلى مجموعة ص فإن ع ⊂ س × ص.

العَلاقةُ من مجموعة إلى نفسها

إذا كان ع علاقة من س إلى س فإن ع تسمى علاقة على المجموعة س وتكون ع ⊂ س × س

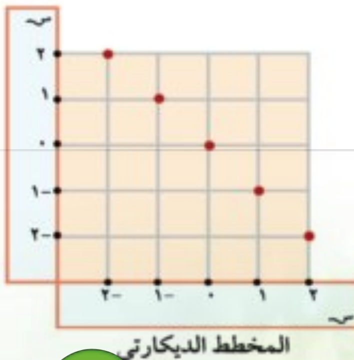
مثال ٢

إذا كانت س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢} وكانت ع علاقةً معرفة على س حيث أ ع ب تعني :
«العدد أ معكوس جمعي للعدد ب». لكل أ، ب ∈ س
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر ديكارتي.

الحل

ع = {(-٢، ٢)، (-١، ١)، (٠، ٠)، (١، -١)، (٢، -٢)}







الدَّالةُ (التطبيق)



سوف تتعلم

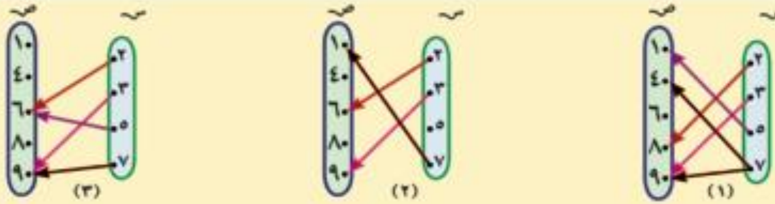
- ☆ مفهوم الدالة
- ☆ كيفية التَّعبير رمزيا عن الدالة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة
- ☆ مجال
- ☆ المجال المقابل
- ☆ مدى

فكر وناقش

الأشكالُ الآتيةُ تمثِّل ثلاثَ عَلاقات من سـ إلى صـ.



١ اكتب بيانَ كل علاقةٍ ومثِّلها بمخططٍ بياني.

٢ أي من هذه العلاقاتِ تحقِّق الشرطَ التالي: كل عنصر من عناصر سـ ارتبط بعنصرٍ واحد فقط من عناصر «صـ».

تعريف

يقالُ لعلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ أنها دالة إذا كان:

كلُّ عنصرٍ من عناصر سـ يظهر كمسقطٍ أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحدّدة لبيان العلاقة.

التعبيرُ الرمزيُّ للدالة:

١ يرمزُ للدالةِ بأحد الرموز: د أو ف أو ر أو ...

والدالة د من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ تكتب رياضيًا:

د: سـ ← صـ وتقرأ: «د دالة من سـ إلى صـ».

ملاحظات:

١ إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى نفسها نقولُ إن د دالة على سـ.

٢ إذا كان الزوجُ المرتب (س، ص) ينتمي لبيان الدالة فإن العنصرَ ص يسمى صورة العنصر س بالدالة د. ونعبر عنه بإحدى الصورتين.

د: س ↦ ص وتقرأ الدالة: د ترسم س إلى ص

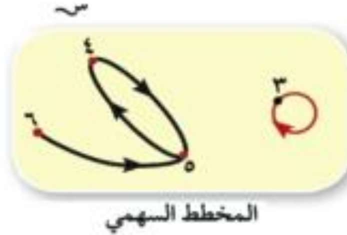
أو د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

مثال ١

إذا كانت د دالة على سـ حيث: سـ = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان د (٣) = ٣، د (٤) = ٥، د (٥) = ٤، د (٦) = ٥.
مثل د بمخطط سهمي وآخر بياني، اكتب بيانها.

الحل

بيان د = { (٣، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٥)}



المخطط السهمي

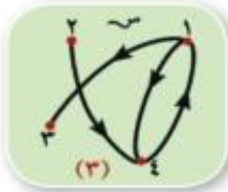

المخطط البياني



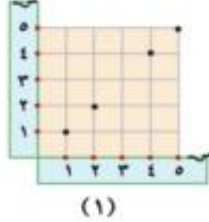
١ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣، ٤} فأي من المخططات السَّهمية الآتية تعبّر عن دالةٍ على المجموعة سـ

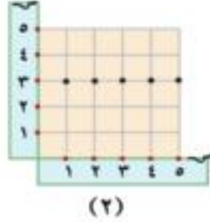

(١)

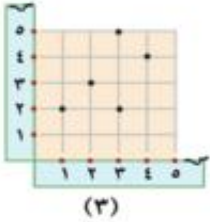

(٢)


(٣)

٢ أي من المخططاتِ البيانيةِ الآتية تعبِّر عن دالة من سـ إلى سـ.


(١)


(٢)

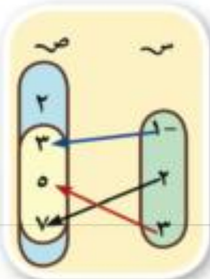

(٣)

فكِّر: هل كل علاقة دالة؟ فسِّر إجابتك وأعط أمثلة.

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ، أي أن: د: سـ ← صـ فإن:
المجموعةُ سـ تسمى مجال الدالة د.
المجموعةُ صـ تسمى المجال المقابل للدالة د.
مجموعةُ صور عناصر مجموعة المجال سـ بالدالة د تسمى مدى الدالة.

فمثلاً: إذا كانت د: سـ ← صـ
، سـ = { - ١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}، بيان د = { (-١، ٣)، (٣، ٥)، (٢، ٧)} فإن:



١ مجال الدالة د هو المجموعة سـ = { - ١، ٢، ٣}
٢ المجالُ المقابلُ للدالةِ د هو المجموعة صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}
٣ مدى الدالة د هو مجموعةُ صور عناصر المجموعة سـ بواسطة الدالة د = { ٣، ٥، ٧}

لاحظ أن : المدى مجموعةٌ جزئيةٌ من المجالِ المقابل للدالة.

مطابع الشركة القومية للتوزيع



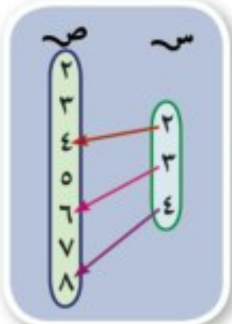
إذا كانت سـ = {٢، ٣، ٤}، صـ = {ص : ص ∈ ط، ٢ ≤ ص < ٩} حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني: «أ = $\frac{1}{2}$ب» لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ، اكتب بيان ع ومثّلها بمخطط سهمي. بين أن ع دالة من سـ إلى صـ وأوجد مداها.

الحل

صـ = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} بيان ع = {(٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ يخرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر صـ

مدى الدالة = {٤، ٦، ٨}





إذا كانت سـ = {٠، ١، ٣}، صـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧} وكانت د : سـ ⟵ صـ

حيث د (س) = ٥ − س. أوجد : ١ـ أوجد صور عناصر سـ بالداله د.

٢ـ ارسم مخطط بيانى للداله د.

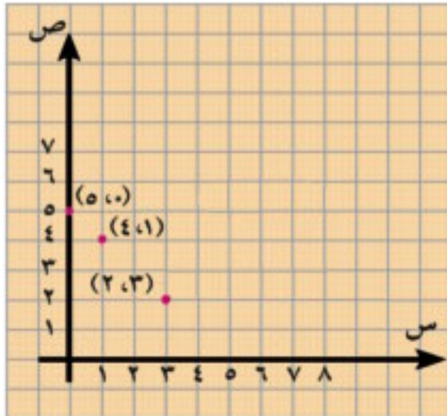
الحل

د (س) = ٥ − س

د (٠) = ٥ ، د (١) = ٤ ، د (٣) = ٢

بيان الداله د = {(٠ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢)}

مدى الداله = {٥ ، ٤ ، ٢}



مطابع الشركة القومية للتوزيع



دوالُّ كثيراتُ الحُدودِ

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم الدالة الخطية وتمثيلها البياني.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالةٌ كثيرةُ الحدود.
- ☆ دالةٌ خطيةٌ.
- ☆ دالة تربيعية.
- ☆ تمثيل بياني للدالة.

فكر وناقش

في الدوال د: ح ← ح ، د(س) = ٥

ر: ح ← ح ، ر(س) = ٣ س - ٨

هـ: ح ← ح ، هـ(س) = ٤ س^{٢} - ٥ س + ٨

نلاحظ أن:

1. المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقية ح.
2. قاعدةُ الدالة (صورة س) هي حد أو مقدار جبري.
3. ما قوة المتغير س في الدوالِ السابقةِ؟

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث:

د(س) = ا$_{٠}$ + ا$_{١}$س + ا$_{٢}$س^{٢} + ... + ا$_{ن}$ س^{ن} حيث ا$_{٠}$، ا$_{١}$، ا$_{٢}$، ... ا$_{ن}$ ∈ ح
ن ∈ ط، ا$_{ن}$ ≠ ٠، تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة ن.

وتكون: درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة.



1. أي من الدوالِّ التالية تمثل كثيرة حدود:
   - أ) د$_{١}$(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣
   - ب) د$_{٢}$(س) = س^{٣} + $\frac{١}{س}$ + ٧
   - جـ) د$_{٣}$(س) = س^{٢} + $\sqrt{س}$ + ٨
   - د) د$_{٤}$(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ − ٢)
2. إذا كانت د: ح ← ح فاذكر درجة الدالة في كل حالة:
   - أ) د(س) = ٣ − ٢ س
   - ب) د(س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٣)
   - جـ) د(س) = س (س − ٢س^{٢})
   - د) د(س) = س^{٢} (س − ٣)^{٢}

مطابع الشركة القومية للتوزيع

مثال ١

إذا كان د(س) = س^{٢} - س + ٣ أوجد: د (-٢) ، د (٠) ، د ($\sqrt{٣}$)

الحل

∵ د (س) = س^{٢} - س + ٣ ∴ د (-٢) = (-٢)^{٢} - (-٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩

د (٠) = ٣ ، د ($\sqrt{٣}$) = ($\sqrt{٣}$)^{٢} - $\sqrt{٣}$ + ٣ = ٦ - $\sqrt{٣}$

تدرب

إذا كانت: د (س) = س^{٢} - ٣ س ر (س) = س - ٣

أ أوجد: د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$) ب اثبت د (٣) = ر (٣) = صفر

الدالة الخطية

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب ، أ، ب ∈ ح، أ ≠ ٠ تسمى هذه الدالة دالة خطية، أو دالة من الدرجة الأولى.

التمثيلُ البياني للدالة الخطيَّة:

مثال ٢

مثِّل بيانيًّا الدالة د: ح ← ح، د (س) = ٢ س - ٣

الحل

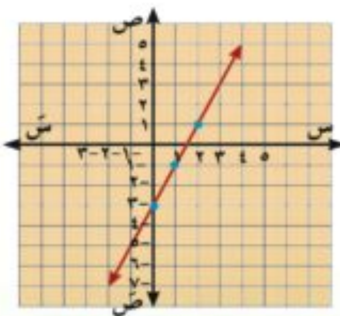
∵ د (س) = ٢ س - ٣

∴ د (٠) = ٠ - ٣ = -٣، د (١) = ٢ - ٣ = -١ ، د (٢) = ٤ - ٣ = ١

يمكن وضعُ هذه الأزواج المرتبة داخلَ جدول كالآتي:

س	٠	١	٢
ص = د (س)	-٣	-١	١

وتمثَّل الأزواجُ المرتبةُ على الشبكةِ التربيعية لحاصلِ الضرب الديكارتي ح × ح



مطابع الشركة القومية للتوزيع

ملاحظات:

١ يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ، و يفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتَّحقق من صحةِ التمثيل البيانى للدالة.

٢ إذا كانت د : ع ← ع، د (س) = ا س، حيث ا ≠ ٠ فإنه يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)



مثِّل بيانيًا كل من الدوال الآتية:

١ د: د (س) = س + ٢ ٢ ر : ر (س) = ٣ س ٣ ق : ق (س) = - ٢ س

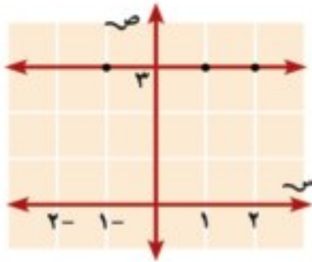
حالة خاصة: إذا كانت د : ع ← ع ، د (س) = ب حيث ب ∈ ع

فإن د تُسمىّ دالةً ثابتةً.

فمثلاً: د (س) = ٣ وتكتب ص = ٣

تمثل بمستقيم يوازي محور السينات.

س	١-	١	٢
ص = د (س)	٣	٣	٣





مثل الدوال التالية بيانيًا

١ د (س) = ٥ ٢ د (س) = -٤ ٣ د(س) = ٠ ٤ د (س) = $\frac{1}{2}$ ٢

الدالةُ التَّربيعيةُ

الدالة د : ع ← ع حيث د (س) = ا س^{٢} + ب س + جـ، ا، ب، جـ أعـداد حقيقية، ا ≠ ٠ تُسمى دالة تربيعية. وهي دالة من الدرجة الثانية.

التمثيل البياني للدالة التربيعية.



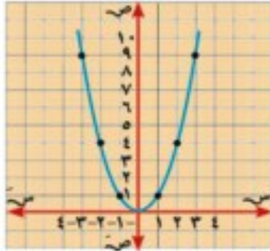
مثل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د، حيث د (س) = س^{٢}، س ∈ ع متخذًا س ∈ [-٣،٣]

الحل

نعين بعضَ الأزواج المرتَّبة (س، د (س)) التي تنتمي إلى بيانِ الدالة د حيث س ∈ ع وأن الفترة [- ٣، ٣] تعطي بعضَ القيم الممكنة للمتغير س.

د(- ٣) = ٩، د(- ٢) = ٤، د (- ١) = ١، د(٠) = ٠، د (١) = ١، د (٢) = ٤، د (٣) = ٩

نضعُ هذه الأزواجَ المرتبةَ في جدولٍ كالآتي:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نعيِّن في المستوى الديكارتي النقاطَ التي تُمثِّل هذه الأزواجَ المرتبة. ثم نرسمُ منحنيًا ممهدًا يمرُّ بهذه النقاط.

لاحظ أن:

١ منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

٢ إحداثي رأسي المنحنى (٠، ٠) والقيمة الصغرى للدالة = ٠

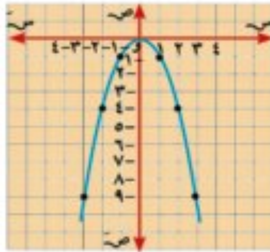


مثال ٤

مثِّل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د حيث: د (س) = - س^{٢}، س ∈ ح متخذًا س ∈ [- ٣، ٣]

الحل

نكرِّر نفس خطوات الحل السابقة:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = د (س)	٩-	٤-	١-	٠	١-	٤-	٩-

ومن الرسمِ نلاحظ أن:

١ منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

٢ إحداثي رأس المنحنى (٠، ٠) والقيمة العظمى للدالة = ٠

الجبر

الوحدة الثانية: **النسبة والتناسب**

والتغير الطردى والتغير العكسى

هل تعلم ؟

أن وزن الجسم على سطح القمر يساوى $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض

تصور أنك ذهبت فى رحلة للقمر ؛ كم سيصبح وزنك؟



النسبة



سوف تتعلم

- مفهوم النسبة.
- خواص النسبة.

المصطلحات الأساسية

- مقدم النسبة.
- تالى النسبة.
- حدّا النسبة.

فكر وناقش

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هى: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{٤}{٣}$

وعمومًا إذا كان أ، ب عددين حقيقيين **فإن النسبة**

بين العدد أ والعدد ب

تكتب بإحدى الصور: أ إلى ب أو أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة، ويسمى ب تالى النسبة، ويسمى أ، ب معًا **بحدى النسبة.**

أكمل وأجب عن الأسئلة:

١ هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر؟

$\frac{٣}{٥} \overset{؟}{=} \frac{٣ \times ....}{٥ \times ....}$

٢ هل تتغير النسبة إذا أضفنا عددًا حقيقيًّا لكل من حديها؟

$\frac{٢}{٣} \overset{؟}{=} \frac{٢ + ...}{٣ + ...}$

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$، هل أ = ٣، ب = ٥ لجميع قيم أ، ب؟

مطابع الشركة القومية للتوزيع



(١)

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

∴ $\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ٣ (س + ٧) = ٢ (س + ١١)

∴ ٣ س + ٢١ = ٢ س + ٢٢ ∴ ٣ س - ٢ س = ٢٢ - ٢١

∴ س = ١



(٢)

أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ :٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل علي النسبة ٣:٢

الحل

نفرض ان العدد المطلوب = س حيث س $\in$ $ح_+$ ∴ مربعه = $س^٢$

∴ $\frac{٢٩ + س^٢}{٤٦ - س^٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢ (٢٩ + $س^٢$) = ٣ (٤٦ − $س^٢$)

٥٨ + ٢ $س^٢$ = ١٣٨ − ٣ $س^٢$ ∴ ٥$س^٢$ = ٨٠

∴ $س^٢$ = ١٦ ∴ س = ٤



التناسب

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم التناسب
- ☆ خواص التناسب
- ☆ التناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- ☆ تناسب
- ☆ أول متناسب
- ☆ ثانى متناسب
- ☆ ثالث متناسب
- ☆ رابع متناسب
- ☆ طرفا التناسب
- ☆ وسطا التناسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه **يقال أن** أ، ب، جـ، د كميات متناسبة، وإذا كانت الكميات أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

فى التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ يسمى **(الأول المتناسب)**، ب يسمى **(الثانى المتناسب)**، جـ يسمى **(الثالث المتناسب)**، د يسمى **(الرابع المتناسب)**.

كما يسمى أ، د **طرفى التناسب**، ب، جـ **وسطى التناسب**.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن:

① أ = م جـ ، ب = م د حيث م ∈ ح*

② أ د = ب جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

③ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عددية من عندك

ثانيًا: إذا كان: أ د = ب جـ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص بالمثال العددى الآتى:

تعلم أن: ٤ × ٨ = ٢ × ١٦

فإن: $\frac{٤}{٢} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{٤}{١٦} = \frac{.....}{.....}$

مثال ١

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة: $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

نفرض أن س = ٢م، ص = ٣م (حيث م ثابت ≠ صفر)

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م} = \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر:

بقسمة كل من البسط والمقام على ص ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{٣ \times \frac{س}{ص} + ٢}{٦ - \frac{س}{ص}} = \frac{٣ \times \frac{٢}{٣} + ٢}{٦ - \frac{٢}{٣}}$ ⟵ أكمل $= \frac{\dots}{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$

مثال ٢

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب س

$\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

$\therefore ٤ \times س = ١٢ \times ١٦$ [حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين]

$\therefore$ س $= \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$ $\therefore$ الرابع المتناسب = ٤٨

مثال ٣

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد س فتكون الأعداد ٣ + س، ٥ + س، ٨ + س، ١٢ + س متناسبة

$\therefore \frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$ $\therefore$ (٥ + س) (٨ + س) = (٣ + س) (١٢ + س)

$\therefore ٤٠ + ١٣س + س^٢ = ٣٦ + ١٥س + س^٢$ $\therefore$ ١٥س - ١٣س = ٤٠ - ٣٦

$\therefore$ ٢س = ٤ $\therefore$ س = ٢



① أ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢، .... ، ٤، ٦

ب أوجد الثالث المتناسب للأعداد ٨، ٦، .... ، ١٢

② إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة ٧أ + ٩ب : ٤أ + ٢ب

ثالثاً: إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ...$ ، م١، م٢، م٣ ... ∈ ح*

فإن: $\frac{\text{أ م}_١ + \text{جـ م}_٢ + \text{هـ م}_٣ + ...}{\text{ب م}_١ + \text{د م}_٢ + \text{و م}_٣ + ...}$ = إحدى النسب

فمثلا: إذا كان: $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣} = \frac{\text{جـ}}{٤}$ بضرب حدى النسبة الأولى فى ٢ وحدى النسبة الثانية فى -٥ وحدى النسبة الثالثة فى ٣ ∴ $\frac{٢\text{أ} - ٥\text{ب} + ٣\text{جـ}}{٢\times٢ - ٣\times٥ + ٣\times٤}$ = إحدى النسب

أى أن: ٢أ - ٥ب + ٣جـ = إحدى النسب



مثال ٤

إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} - ٢\text{د}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$

الحل

∵ إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٥ والثانية فى ٣ فإن مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

∴ $\frac{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$ = إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٣ والثانية فى -٢ فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب.

∴ $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٣\text{ب} - ٢\text{د}}$ = إحدى النسب (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\frac{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٣\text{ب} - ٢\text{د}}$

∴ $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} - ٢\text{د}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$ (وهو المطلوب إثباته)

حل آخر:

افرض $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت

أ = ب م ، جـ = د م وعوض فى كلا الطرفين.



إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فأثبت أن:**

أولاً: $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ **ثانيًا:** $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

إرشاد: افرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت ≠ ٠ وأكمل أو بأى طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{٢}{٦}$، $\frac{٦}{١٨}$

① هل توجد علاقة بين $(٦)^{٢}$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

② إذا استبدل العدد ٦ بالعدد (-٦) هل توجد علاقة بين $(-٦)^{٢}$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، جـ:إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، جـ بالثالث المتناسب

حيث: $ب^{٢} =$ أجـ أو ب = ± $\sqrt{أجـ}$

مطابع الشركة القومية للتوزيع



مثال ٥

أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل

الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{٣\times٢٧} = \pm ٩$



مثال ٦

إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، جـ

أي أ، ب، جـ فى تناسب متسلسل

نفرض $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

$\therefore$ ب = جـ م، أ = ب م = جـ م × م = جـ م^{٢}

الطرف الأيمن = $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}} = \frac{جـ^{٢}م^{٤}+جـ^{٢}م^{٢}}{جـ^{٢}م^{٢}+جـ^{٢}}$

$= \frac{جـ^{٢}م^{٢}(م^{٢}+١)}{جـ^{٢}(م^{٢}+١)} = م^{٢}$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^{٢}}{جـ} = م^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}+جـ^{٢}} = \frac{أ}{جـ}$

مطابع الشركة القومية للتوزيع

حل آخر:

بفرض: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ $\therefore \frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢}{جـ^٢} = م^٢$

من النسبتين الأولى والثانية $م^٢ = \frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢}$ = الطرف الأيمن

، $م^٢ = \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ}$ = الطرف الأيسر

من (١)، (٢) $\therefore \frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

مثال (٧) أكمل مايأتي :

١ ـ إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل

فإن : $س^٢ص$ = ...

٢ـ الوسط المتناسب للكميتين ٩ $س^٢$ −٢٥ $ص^٢$ ، $\frac{٣ س + ٥ ص}{٣ س − ٥ ص}$ هو ....

الحل

١ ـ $\because$ ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل فإن $\frac{٧}{س}$ = س ص

$\therefore$ $س^٢ ص = ٧$

٢ـ $\because$ ٩ $س^٢$ − ٢٥ $ص^٢$ ، م ، $\frac{٣ س + ٥ ص}{٣ س ـ ٥ ص}$ في تناسب متسلسل

حيث م الوسط المتناسب

$\therefore$ $\frac{٩س^٢ − ٢٥ ص^٢}{م} = \frac{م (٣ س − ٥ ص)}{٣ س + ٥ ص}$ $\therefore$ $م^٢ = (٣ س + ٥ ص)^٢$

$\therefore$ م = $\pm$ (٣ س + ٥ ص)



التغير الطردى و التغير العكسى



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم التغير الطردى
- ☆ مفهوم التغير العكسى
- ☆ كيفية التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

- ☆ تغير
- ☆ تغير طردى
- ☆ تغير عكسى

أولا: التغير الطردى

فكر وناقش (١)



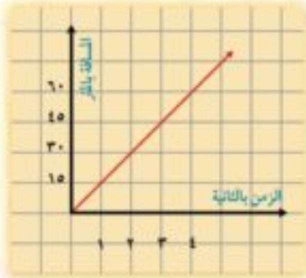
تتحرك سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث فإذا كانت المسافة المقطوعة ف بالمتر فى زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة: ف = ع ن.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

أ مثّل العلاقة بين ف، ن بيانيًا.

ب هل التمثيل البيانى يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)؟

جـ أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ؟



نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقدارًا ثابتًا وهو ١٥

أي: ف = ١٥ ن ويقال حينئذ إن ف تتغير طرديًا بتغير ن وتكتب رمزيًا ف ∝ ن.

تعريف:

يقال: إن ص تتغير طرديًا مع س وتكتب ص ∝ س إذا كانت ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠) وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_١$، $س_٢$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$، $ص_٢$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

مطابع الشركة القومية للتوزيع

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ إذا كانت ص ∝ س فإن ص = م س **وكذلك** إذا كانت ص = م س فإن ص ∝ س

مثال ١

إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**

أولاً: العلاقة بين ص، س　　　　**ثانيًا**: قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

أولاً: ∵ ص ∝ س　　　∴ ص = م س　　　(حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

∴ ١٤ = ٤٢ × م　　　∴ م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$　　　∴ العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

ثانيًا: عندما س = ٦٠　　　∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

ملاحظة: يمكن استخدام العلاقة $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_١}{س_٢}$ لإيجاد قيمة ص فى المطلوب الثاني

ثانياً: التغير العكسى

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

أ **اكتب** العلاقة بين كل من م ، س ، ص.

ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوى ٣٠ سم^٢ **فاكمل** الجدول الآتى:

س	٣	٥	٦	١٠
ص	....	....	....	....

جـ **أوجد** س ص فى كل حالة. **ماذا تلاحظ؟**

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠　　أى أن: ص = $\frac{٣٠}{س}$　　أى أن ص تتغير عكسيًا بتغير س وتكتب رمزيًا　ص ∝ $\frac{١}{س}$

وبالمثل:　　س = $\frac{٣٠}{ص}$　　أى أن: س تتغير عكسيًا بتغير ص وتكتب رمزيًا　س ∝ $\frac{١}{ص}$

تعريف:

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ إذا كانت س ص = م (حيث م ثابت ≠ ٠)

وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_1$، $س_2$ وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$، $ص_2$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ولا يمثلها خط مستقيم.

٢ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن: ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وكذلك إذا كانت ص = $\frac{م}{س}$ فإن ص $\propto \frac{1}{س}$.



إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أولاً: أوجد العلاقة بين س، ص. ثانيًا: أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥.

الحل

∵ ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

∴ ٣ = $\frac{م}{٢}$ ∴ م = ٢ × ٣ = ٦

∴ العلاقة هى: ص = $\frac{٦}{س}$

عندما س = ١,٥ ∴ ص = $\frac{٦}{١,٥}$ = ٤

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة ص من العلاقة $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مطابع الشركة القومية للتوزيع



بين أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب فى كل حالة:

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
-٢	-٩
-١٨	١
٩	-٢

مثال ٣

الربط بالفيزياء: إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هى ع = ٩,٨ ن

أولاً: **حدد** نوع التغير بين ع، ن.

ثانيًا: أ **أوجد** قيم ع عندما ن = ٢ ثانية ، ن = ٤ ثوانٍ

ب **أوجد** قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ متر/ث

الحل

أولاً: ∵ ع = ثابت × ن   أى ع ∝ ن   أى ع تتغير طرديًا بتغير ن.

ثانيًا: أ عندما ن = ٢   تكون ع = ٩,٨ × ٢ = ١٩,٦ متر/ث

عندما ن = ٤   تكون ع = ٩,٨ × ٤ = ٣٩,٢ متر/ث

ب عندما ع = ٢٤,٥   تكون ٢٤,٥ = ٩,٨ × ن   ∴ ن = $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = ٢,٥ ثانية.

مثال ٤

الربط بالهندسة: إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم؛ **فأوجد** (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

الحل

$\because$ ع $\propto \frac{1}{نق^٢}$ $\therefore$ ع = م $\times \frac{1}{نق^٢}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

ع = ٢٧ عند نق = ١٠,٥

$\therefore$ ٢٧ = م $\times \frac{1}{(١٠,٥)^٢}$ $\therefore$ م = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢$ (١)

وبالتعويض $\therefore$ ع = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢ \times \frac{1}{نق^٢}$ من (١)

وعندما نق = ١٥,٧٥ سم $\therefore$ ع = ٢٧ × $(١٠,٥)^٢ \times \frac{1}{(١٥,٧٥)^٢}$ = ١٢ سم

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلى:

27 × 10.5 x^2 ÷ 15.75 x^2 =



مثال (٥)

الربط مع الكيمياء : إذا كانت العلاقة بين كل من الكثافة (ث) و الكتلة (ك) و الحجم (ح) هي

ث = $\frac{م ك}{ح}$ ، (حيث م ثابت ≠ ٠)

أولاً : حدد نوع التغيير بين ث ، ك ونوع التغيير بين ث ، ح

ثانياً : أوجد قيمة م إذا كان ث = ٦ جم / سم^٣ ، ك = ٣٠ جم ، ح = ٧ سم^٣

ثالثاً : أوجد قيمة ح إذا كان ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^٣

الحل

أولاً : الكثافة (ث) تتناسب طردياً مع الكتلة (ك) ، تتناسب عكسياً مع الحجم (ح)

ثانياً : ث = $\frac{م ك}{ح}$ ⟵ ٦ = $\frac{م (٣٠)}{٧}$ ⟵ م = $\frac{٤٢}{٣٠}$ = $\frac{٧}{٥}$

ثالثاً : وعندما ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^٣ $\therefore$ ٩ = $\frac{٧ \times ٤,٥}{٥ ح}$

$\therefore$ ح = $\frac{٧ \times ٠,٩}{٩}$ = ٠,٧ م^٣

مطابع الشركة القومية للتوزيع

الوحدة الثالثة : الإحصاء



مطعم للمثلجات يقدم أنواعًا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين.

ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.

٣ - ١

جمع البيانات



سوف تتعلم

- ☆ أنواع مصادر جمع البيانات.
- ☆ أساليب جمع البيانات.
- ☆ كيفية اختيار عينة.
- ☆ أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

- ☆ مصادر أولية.
- ☆ مصادر ثانوية.
- ☆ أسلوب الحصر الشامل.
- ☆ أسلوب العينات.
- ☆ اختيار متحيز.
- ☆ اختيار عشوائي.
- ☆ عينة.
- ☆ عينة عشوائية.
- ☆ عينة طبقية.

فكر وناقش

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائى واتخاذ القرارات المناسبة.

١ ما مصادر جمع البيانات؟ ٢ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

١ مصادر أولية (مصادر ميدانية):

وهى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأى) ويتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

٢ مصادر ثانوية (مصادر تاريخية):



وهى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

ويتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعًا للهدف وحجم المجتمع الإحصائى محل البحث. ويعرف المجتمع الإحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة.

فمثلاً: تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته التلميذ .



أولا: أسلوب الحصر الشامل:



ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج.

ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة.

ثانيًا: أسلوب العينات:

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائى الذى تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات:

١ توفير الوقت والجهد والتكاليف.

٢ الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع الأسماك مثلاً).

٣ الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة فى بعض الأحيان مثل:



أ فحص دم مريض من خلال عينة (لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة).

ب فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح. (معرفة العمر الزمنى للمصباح الكهربى يقتضى إشعاله حتى احتراقه).

ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيدًا (صادقًا)، وتسمى بالعينة المتحيزة.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها فى العينة :

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)



وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما فى مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار فى ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولايعتبر هذا الاختيار عشوائيًّا.

ثانيًا: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

١ العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

أ إذا كان حجم المجتمع صغيرًا:



عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل ٤٠ تلميذًا فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ يكتب عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة ، ثم توضع فى صندوق ، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق . وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

ب إذا كان حجم المجتمع كبيرًا:



بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ،فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملية شاقة ؛فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠ ، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج EXCEL) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩ ، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ كما يلى :



ومع تكرار الضغط على مفتاح [=] تتوالى ظهور الأرقام ونكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

٢ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس؛ أي يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعًا للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، و يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.



مثال: عند دراسة المستوى التعليمى لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصًا؛ فلابد أن نختار ٣٠ شخصًا من طبقة الذكور، ٢٠ شخصًا من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.



مصنع به ٥٠٠ عامل ويريد المسئولون عن المصنع معرفة آراء العاملين فى نظام ساعات الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع . وضح كيف يتم اختيار هذة العينة باستخدام الآلة

الحل

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٥٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠ = ٥٠ عاملاً

أي أننا نريد اختيار ٥٠ عاملاً لإجراء هذا الأستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كما يلى :

١- يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقماً من ١ إلى ٥٠٠

٢- تستخدم الآلة الحاسبة العلمية لاختيار ٥٠ رقماً بالطريقة السابق ذكرها والتى تنحصر بين ١ ، ٥٠٠ والأرقام العشوائية التى تظهر اكبر من ٥٠٠ يتم استبعادها.

ناقش معلمك فى الحل

مطابع الشركة القومية للتوزيع



التشتت



سوف تتعلم

- ☆ مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المعيارى)

مصطلحات أساسية

- ☆ نزعة مركزية.
- ☆ وسط حسابي.
- ☆ تشتت.
- ☆ مدى.
- ☆ انحراف معياري.

فكر وناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى، الوسيط، المنول) وأمكنك حسابها لأية مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حول هذه القيمة.



فإذا كان الأجر الأسبوعى بالجنيهات لمجموعتين من العمال أ، ب فى أحد المصانع كما يلى:

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠

مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

١ أوجد الوسط الحسابى لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

٢ قارن بين أجور المجموعتين أ، ب. ماذا تستنتج؟

تعلم أن: الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

فيكون:

الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = $\frac{١٧٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٢٣٠ + ٢٤٠}{٥}$

$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠$ جنيه

الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = $\frac{٥٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٩٠ + ٤٠٠}{٥}$

$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠$ جنيه

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

١ الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = ٢٠٠ جنيه

٢ الأجر الوسيط = الأجر المنوالى = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

مطابع الشركة القومية للتوزيع



ويلاحظ أن:

(١) مجموعتى الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية.

(٢) أجور المجموعة أ متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهًا، بينما أجور المجموعة ب متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٥٠، ٤٠٠ جنيه.

أى أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتًا من أجور المجموعة أ.

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضها.

التشتت: لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.

أى إن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

مقاييس التشتت

١ المدى : (أبسط مقاييس التشتت)

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها فى المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = ٦٠ - ٥١ = ٩

مدى المجموعة الثانية = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠

وعلى هذا نعتبر المجموعة الثانية أكثر تشتتًا من المجموعة الأولى.

لاحظ أن:

(١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

(٢) يتأثر المدى تأثرًا كبيرًا بالقيم المتطرفة.

فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تتشتت فى مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢) منها فإن **المدى** = ٥٢ - ٤٢ = ١٠ أى $\frac{١}{٥}$ المدى السابق حسابه.

(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى،فقد لايعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٢ الانحراف المعيارى:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو **"الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى"**.

أي أن:

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$$

حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات.

$\bar{س}$ (سين Bar) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.

ن إلى عدد المفردات.

مجـ إلى عملية الجمع.

أولا: حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:

مثال

احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ٢١

الحل

لحساب الانحراف المعيارى نكوّن الجدول المقابل حيث:

$$\text{الوسط الحسابى } \bar{س} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مجـ } س}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٦ + ١٨ + ٢١}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

$$\because \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} \simeq ٣,٢٨٦$$

	س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$
	١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
	١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
	١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
	١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
	٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
المجموع	٨٠		٥٤

مطابع الشركة القومية للتوزيع



ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى:

لأى توزيع تكرارى، يكون:

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$

<u>حيث:</u> س تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، ك تكرار القيمة أو المجموعة

مجـ ك مجموع التكرارات ، الوسط الحسابى $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

مثال ١

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة.

الحل

باعتبار عدد الوحدات التالفة (س) وعدد الصناديق المناظر لها (ك)
لحساب الانحراف المعيارى للوحدات التالفة نكوِّن الجدول التالى:
<u>ويكون:</u>

عدد الوحدات التالفة (س)	عدد الصناديق (ك)	س × ك	س - $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$ك
صفر	٣	صفر	٣-	٩	٢٧
١	١٦	١٦	٢-	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	١-	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

الوسط الحسابى $\bar{\text{س}}$

$= \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

$= \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

الانحراف المعيارى σ

$= \sqrt{\frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} \simeq ١,٤٢٨$ وحدة

مثال ٢



التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.

الحل

١ نوجد مراكز المجموعات س

فيكون: مركز المجموعة الأولى = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ = ٦

وهكذا ونسجلها فى العمود الثالث.

٢ نضرب مراكز المجموعات × التكرارات المناظرة لها؛ **أي** س × ك ونسجلها فى العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك}$

٣ نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابى؛ **أي** نوجد $(س - \overline{س})$

٤ نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط الحسابى؛ **أي** $(س - \overline{س})^٢$

٥ نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابى × تكرار هذه المجموعة؛ **أي** $(س - \overline{س})^٢ × ك$

٦ نحسب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ ك}{مجـ ك}}$

فيكون:

المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^2	(س - $\bar{س}$)^{2}ك
-٠	٢	٢	٤	-١٠,٦	١١٢,٣٦	٢٢٤,٧٢
-٤	٥	٦	٣٠	-٦,٦	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
-٨	٨	١٠	٨٠	-٢,٦	٦,٧٦	٥٤,٠٨
-١٢	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
١٦-٢٠	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
المجموع	٤٠		٥٠٤			٨١٧,٦

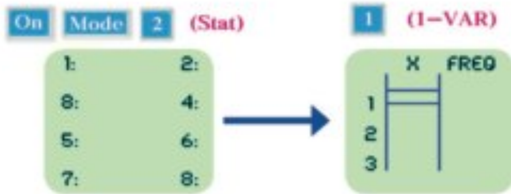
الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \sqrt{٢٠,٤٤} \simeq ٤,٥٢$ درجة

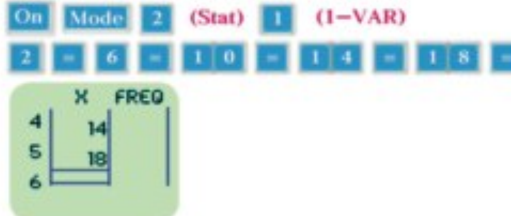
يمكن استخدام حاسبة الجيب [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] فى التحقق من صحة حساب الانحراف المعيارى.

أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائى والاستعداد لإدخال البيانات

ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (مثال ٢)



(١) ندخل مراكز المجموعات ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨



(٢) الانتقال إلى بداية العمود الثانى (FREQ) وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٢، ٥، ٨، ١٥، ١٠



مطابع الشركة القومية للتوزيع

٣ استدعاء الناتج (الانحراف المعيارى)

Shift 1 5 (VAR) 3 ($X\sigma n$) = ▲



فيكون $\sigma \simeq$ ٤,٥٢١

٤ العودة للنظام الأصلى وإغلاق الحاسبة

لاحظ أن:

(١) يتأثر الانحراف المعيارى بانحرافات جميع القيم، وبالتالى تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.

(٢) الانحراف المعيارى له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس عند تساويها فى الوسط الحسابى، وتكون المجموعة الأكبر فى الانحراف المعيارى هى الأكثر تشتتًا.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: **حساب المثلثات**



علم حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات والذى يتناول دراسة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، وكان قدماء المصريين هم أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات فى بناء الأهرامات، وبناء معابدهم، وفى دراسة الفلك، وفى حساب المسافات الجغرافية، كما قاس البابليون الزوايا بالدرجات والدقائق والثوانى، وقد قام البيرونى بعمل جداول لجيوب الزوايا ثم استنتج الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف الغرب على ما صاغه علماء العرب والمسلمون من خلال ترجمة كتب الفلك العربية على يد العالم الألمانى يوهان مولر.

أبو الريحان البيرونى
عالم ولد فى خوارزم عام
٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

٤ - ١

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة



سوف تتعلم

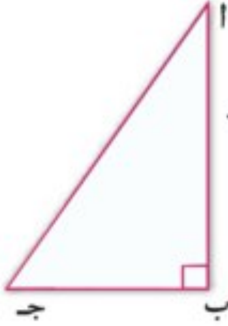
☆ كيفية إيجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.

مصطلحات أساسية

☆ قياس ستينى.
☆ جيب زاوية.
☆ جيب تمام زاوية .
☆ ظل زاوية.

فكر وناقش

فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب،
أكمل باستخدام أحد الرموز (< أو > أو =)



١ إذا كان ق(∠جـ) > ق (∠أ) فإن أب ...... ب جـ

٢ $\frac{أ ب}{أ جـ}$ ١

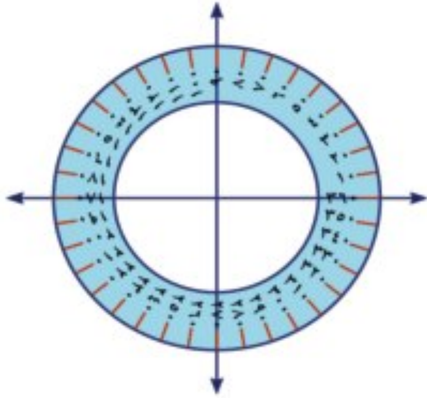
٣ $\frac{أ جـ}{ب جـ}$ ١

٤ $\frac{أ ب}{أ جـ} + \frac{ب جـ}{أ جـ}$ ...... $\frac{أ ب}{ب جـ}$

٥ $\frac{أ ب}{أ جـ} + \frac{ب جـ}{أ جـ}$ ١

٦ $\frac{(أ ب)^{٢}}{(أ جـ)^{٢}} + \frac{(ب جـ)^{٢}}{(أ جـ)^{٢}}$ ١

القياس الستينى للزوايا



درسنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°، وإذا قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة)؛ والدرجة هى وحدة القياس الستينى، كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالى:

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

٣٥ درجة ، ٢٤ دقيقة ، ٤٢ ثانية تكتب

كالآتى: ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° ويمكن تحويل الدقائق والثوانى إلى أجزاء من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :

أولاً: نحول ٢٤َ إلى درجات ٢٤َ = $\frac{٢٤}{٦٠}$ = ٠,٤°، ونحول ٤٢ً أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات:

٤٢ً = $\frac{٤٢}{٦٠}$ = ٠,٧َ ، ٠,٧َ = $\frac{٠,٧}{٦٠}$ = ٠,٠١١٦٦٦٧°

فيكون الناتج ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° = ٣٥ + ٠,٤ + ٠,٠١١٦٦٦٧ = ٣٥,٤١١٦٦٦٧°



ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالى:

٣٥ [°'''] ٢٤ [°'''] ٤٢ [°'''] والناتج هو: ٣٥,٤١١٦٦٦٧°

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

فمثلاً: ٥٤,٣٦° يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

٥٤,٣٦ [=] [SHIFT] [°'''] فيكون الناتج : ٣٦ً ٢١َ ٥٤°



١ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:

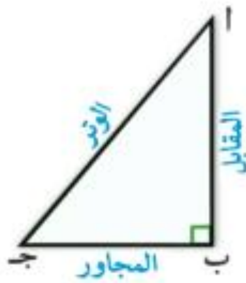
أ ١٦َ ٧٦° ب ٥٦ً ٣َ ٤٥° جـ ٨ً ٣٨َ ٨٥° د ٤٣ً ٢٦َ ٦٥°

٢ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثوانى.

أ ٣٤,٦° ب ٧٨,٠٨° جـ ٥٦,١٨° د ٨٣,٢٤٦°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ، جـ زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية جـ يسمى بالمقابل ، والضلع المجاور للزاوية جـ يسمى بالمجاور ، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وسنتعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهى:

١ جيب الزاوية: ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية sin .

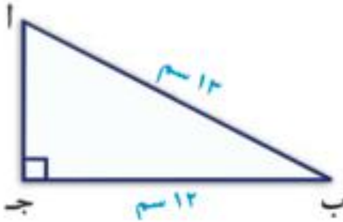
٢ جيب تمام الزاوية: ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية cos .

٣ ظل الزاوية: ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية tan .

مطابع الشركة القومية للتوزيع

جا حـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$
جتا حـ	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
ظا حـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$





١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، أ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٢سم .

أ أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$

ب أوجد كلاً من: جا أ ، جتا أ ، ظا أ ، جا ب ، جتا ب ، ظا ب

جـ أثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

د أوجد : ١ + ظا^2 أ

الحل

أ ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ ∴ (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 - (ب جـ)^2

∴ (أ جـ)^2 = (١٣)^2 - (١٢)^2 = (١٣ + ١٢) (١٣ - ١٢) = ٢٥

∴ أ جـ = ٥سم

ب جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا أ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

جـ الطرف الأيمن = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤ + ٢٥}{١٦٩} = ١$

د ١ + ظا^2 أ = ١ + $(\frac{١٢}{٥})^2$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

٤ - ٢

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

سوف تتعلم

☆ كيفية إيجاد النسب المثلثية للزوايا.

☆ (٣٠°، ٤٥°، ٦٠°)

مصطلحات أساسية

☆ نسبة مثلثية.

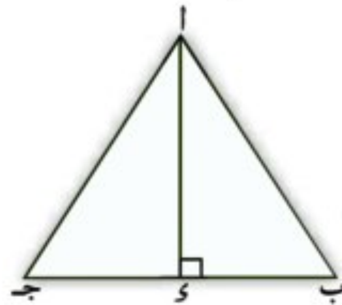
☆ زاوية خاصة.

فكر وناقش

(١) فى الشكل المقابل:

ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٢ل ، رسم $\overline{اى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

أكمل :



(١) ق(∠ب) = ...°

(٢) ق(∠ب ا ى) = ...°

(٣) ب ى = ... ، ا ى = ... (بدلالة ل)

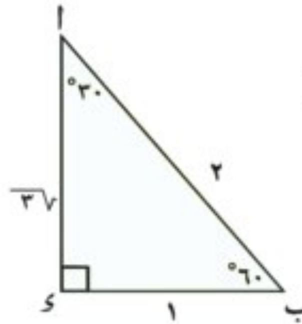
(٤) ب ى : ا ب : ا ى = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ ا ب ى ثلاثينى ستينى، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ب ى : ا ب : ا ى = ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالى :



جا ٣٠° = $\frac{ب ى}{ا ب}$ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{ا ى}{ا ب}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

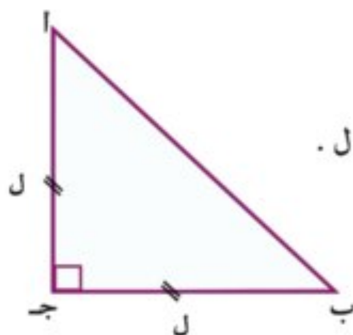
ظا ٣٠° = $\frac{ب ى}{ا ى}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

جا ٦٠° = $\frac{ا ى}{ا ب}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٦٠° = $\frac{ب ى}{ا ب}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ٦٠° = $\frac{ا ى}{ب ى}$ = $\sqrt{٣}$

مطابع الشركة القومية للتوزيع

فكر وناقش



① في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين،وقائم الزاوية فى جـ،وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

① ق(∠أ) = ... ، ق(∠ب) = ...

② ∵ (أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + ... ∴ (أ ب)^{٢} = ل^{٢} + ...

∴ (أ ب)^{٢} = ٢ل^{٢} ∴ أ ب = $\sqrt{٢}$ ل

③ أ جـ : ب جـ : أ ب = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

أ جـ : ب جـ : أ ب = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥° **كالآتى :**

جا ٤٥° = $\frac{أ جـ}{أ ب}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{ب جـ}{أ ب}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{أ جـ}{ب جـ}$ = ١

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالآتى :

ق الزاوية / النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

مطابع الشركة القومية للتوزيع

ملاحظات :

① **مما سبق نجد أن:** (جيب) أى زاوية يساوى (جيب تمام) الزاوية المتممة لهذه الزاوية ، والعكس صحيح .

فمثلاً: جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥°

② لأى زاوية ا يكون : ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$



أوجد قيمة كل من :

أ جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا٢ ٣٠°

ب $\frac{\text{جتا}^2\ 60° + \text{جتا}^2\ 30° + \text{ظا}^2\ 45°}{\text{جا}\ 60°\ \text{ظا}\ 60° - \text{جا}\ 30°}$

الحل

أ المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا٢ ٣٠°

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

ب المقدار = $\frac{\text{جتا}^2\ 60° + \text{جتا}^2\ 30° + \text{ظا}^2\ 45°}{\text{جا}\ 60°\ \text{ظا}\ 60° - \text{جا}\ 30°} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1+1}{1} = 2$



برهن على صحة كل مما يأتى:

أ جا٢ ٣٠° = ٥ جتا٢ ٦٠° - ظا٢ ٤٥°

ب ظا٢ ٦٠° - ظا٢ ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا٢ ٣٠°

مطابع الشركة القومية للتوزيع



مثال٢

أوجد النسب المثلثية التالية :

جا ٤٣° ، جتا ٢٨َ ٥٣° ، ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤°

مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

جا ٤٣° ≃ ٠,٦٨٢٠ ابدأ ← sin ٤٣ =

جتا ٢٨َ ٥٣° ≃ ٠,٥٩٥٣ ابدأ ← cos ٥٣ °''' ٢٨ °''' =

ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤° ≃ ٢,١٠٨٩ ابدأ ← tan ٦٤ °''' ٣٧ °''' ٤٩ °''' =

إيجاد الزاوية إذا عُلمت النسبة المثلثية لها :

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كانت الزاوية قياسها ٣٠° فإن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ وكذلك إذا كانت الزاوية قياسها ٣٣° فإن جا ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

٢ ، ١ ، ٣٠° ، $\sqrt{٣}$

sin ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كان جا س = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ والمطلوب معرفة قيمة س .

فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:

ابدأ ← SHIFT sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = °''' ٣٣°

مثال٣

أوجد ق(∠هـ) فى كل مما يأتى :

جا هـ = ٠,٦ ، جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ، ظا هـ = ١,٠٨٢٣

الحل

∵ جا هـ = ٠,٦ ∴ ق(∠هـ) = ١٢ً ٥٢َ ٣٦ْ SHIFT sin ٠,٦ = ?

∵ جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ∴ ق(∠هـ) = ٣٥ً ٣٣َ ٥١ْ SHIFT cos ٠,٦٢١٧ = ?

∵ ظا هـ = ١,٠٨٢٣ ∴ ق(∠هـ) = ٤٨ً ١٥َ ٤٧ْ SHIFT tan ١,٠٨٢٣ = ?

الربط بالهندسة: مثال٤ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم.

أوجد :

أولاً: ق(∠ب)

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.

الحل

نرسم أ ى ⊥ ب جـ

∵ المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

∴ ى منتصف ب جـ ويكون ب ى = جـ ى = ٦سم

∵ جتا ب = ٦/٨ = ٣/٤ = ٠,٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة:

SHIFT cos 0.75 = ?

∴ ق(∠ب) = ٣٥ً ٢٤َ ٤١ْ (وهو المطلوب أولاً)

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أ ى (من نظرية فيثاغورث)

∵ (أ ى)^2 = (أ ب)^2 - (ب ى)^2

∴ (أ ى)^2 = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨ ∴ أ ى = ٢ $\sqrt{٧}$

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = ١/٢ × ب جـ × أ ى = ١/٢ × ١٢ × ٢ $\sqrt{٧}$

= ١٢ $\sqrt{٧}$ سم^2 ≃ ٣١,٧٥سم^2 (وهو المطلوب ثانياً)

مطابع الشركة القومية للتوزيع

حل آخر للجزء الثانى:

$\because$ جا ب = $\frac{أ ء}{أ ب}$ $\therefore$ جا ب = $\frac{أ ء}{٨}$

$\therefore$ أ ء = ٨ جا (٣٥َ ٢٤ً ٤١°) (١)

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ء وبالتعويض من (١) فى هذه العلاقة

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ جا (٣٥َ ٢٤ً ٤١°) ≃ ٣١,٧٥ سم٢.

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالى:

ابدأ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 sin 41 °''' 24 °''' 35 °''' =

مثال ٥

أوجد قيمة س التى تحقق س جا ٣٠° جتا٢ ٤٥ = جا٢ ٦٠°

الحل

$\because$ س جا ٣٠° جتا٢ ٤٥° = جا٢ ٦٠°

$\therefore$ س × $\frac{١}{٢}$ × $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$

$\therefore$ س × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ⟸ س = ٣

مثال ٦

أوجد قيمة س التى تحقق ٢ جا س = ظا٢ ٦٠° − ٢ظا٢ ٤٥° حيث س زاوية حادة

الحل

$\because$ ٢ جا س = ظا٢ ٦٠° − ٢ظا٢ ٤٥°

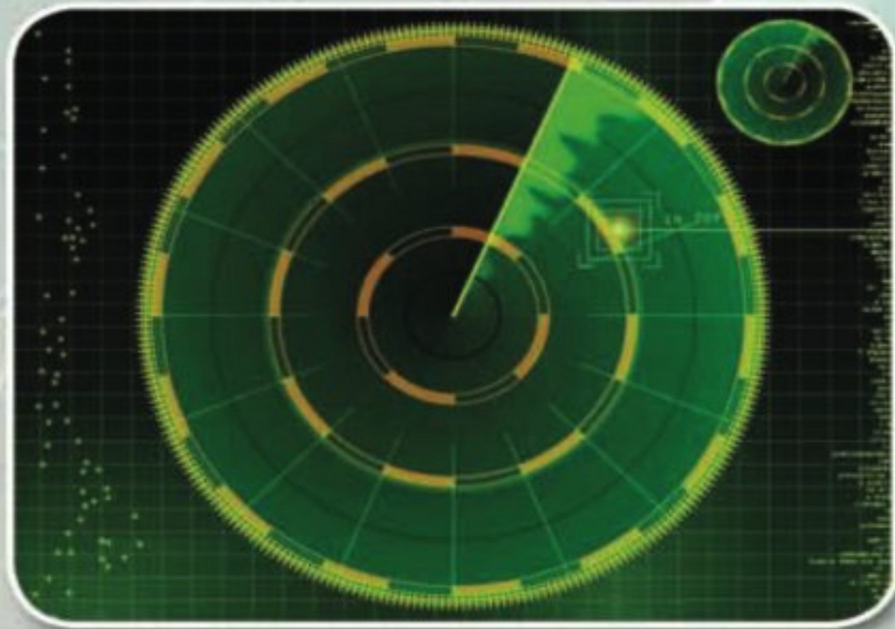
$\therefore$ ٢جا س = $(\sqrt{٣})^٢$ − ٢ × ١ = ٣ − ٢ = ١

$\therefore$ جا س = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ س = ٣٠°

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية



يستخدم الرادار فى التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة الأجسام المتحركه كالطائرات والسفن.

وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن- ...)

٥ - ١

البعد بين نقطتين

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد البعد بين نقطتين باستخدام قانون البعد.

مصطلحات أساسية

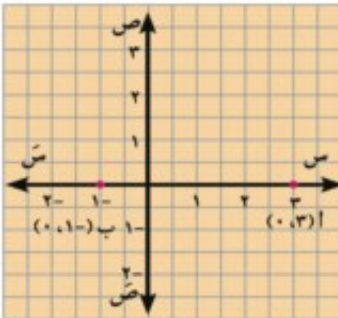
- مستوى إحداثي.
- زوج مرتب.
- بعد بين نقطتين.

فكر وناقش

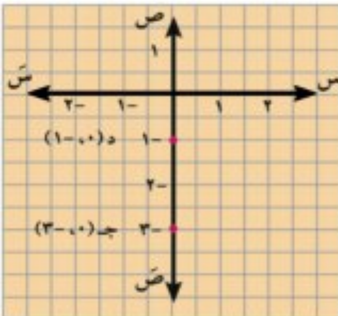
سبق أن قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثي .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

١ أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠)
٢ جـ (٠، -٣)، د (٠، -١)
٣ م (٣، ٢)، ن (٧، ٥)

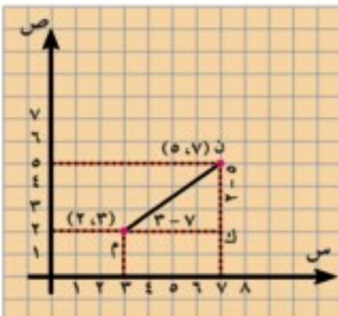
نلاحظ مما سبق أن :



١ النقطتين أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠) تقعان على محور السينات، وبالتالى فإن :
أ ب = |-١ - ٣ | = | -٤|
فيكون أ ب = ٤ وحدة طول.



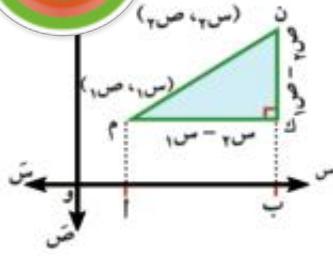
٢ النقطتين جـ (٠، -٣)، د (٠، -١) تقعان على محور الصادات، وبالتالى فإن :
جـ د = |-٣ - (-١)|
= |-٣ +١| = | -٢|
فيكون جـ د = ٢ وحدة طول .



٣ النقطتين م (٣، ٢)، ن (٧، ٥) يمكن تمثيلهما بيانيًا كما فى الشكل المقابل.
ولإيجاد طول $\overline{\text{م ن}}$ نوجد :
م ك = |٧ - ٣ | = ٤ وحدة طول،
ن ك = |٥ - ٢| = ٣ وحدة طول .
△ م ك ن قائم الزاوية فى ك
∴ (ن م)^{٢} = (م ك)^{٢} + (ك ن)^{٢}
(نظرية فيثاغورث)

(ل م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} (ل م)^{٢} = ٩ + ١٦
(ل م)^{٢} = ٢٥ ∴ (ل م) = ٥ وحدة طول

وبوجه عام :



إذا كانت : م (س١، ص١)، ن (س٢، ص٢) نقطتين فى المستوى الإحداثى

فإن : ك م = |و ب - و أ|

= |س٢ - س١|

ك ن = |ن ب − ك ب| = |ص٢ − ص١|

∵ △ ن ك م قائم الزاوية فى ك (نظرية فيثاغورث)

∴ (م ن)٢ = (ك م)٢ + (ك ن)٢

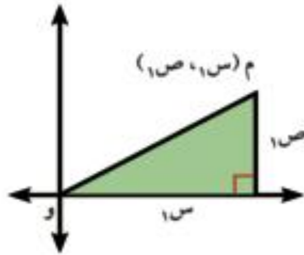
= (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

∴ م ن = $\sqrt{\text{(س٢ - س١)٢ + (ص٢ - ص١)٢}}$

البعد بين النقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢) = $\sqrt{\text{(س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢}}$

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة :



فى الشكل المقابل بعد النقطة م (س١، ص١) عن نقطة الأصل و (٠، ٠)

و م = $\sqrt{\text{س١٢ + ص١٢}}$

مثال ١

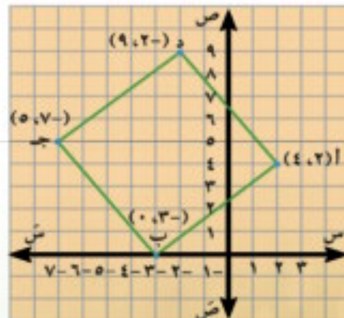
أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢، ٤)، ب (-٣، ٠)، جـ(-٧، ٥) د(-٢، ٩) اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.

الحل

أ ب = $\sqrt{\text{(س٢ - س١)٢ + (ص٢ - ص١)٢}}$ = $\sqrt{\text{[-٣-٢]٢ + [٠ -٤]٢}}$ = $\sqrt{\text{(-٥)٢ + (-٤)٢}}$ = $\sqrt{41}$

ب جـ = $\sqrt{\text{[-٧-(-٣)]٢ + [٥ - ٠]٢}}$ = $\sqrt{\text{(-٤)٢ + (٥)٢}}$ = $\sqrt{41}$

جـ د = $\sqrt{\text{[-٢-(-٧)]٢ + [٩ -٥]٢}}$ = $\sqrt{\text{(٥)٢ + (٤)٢}}$ = $\sqrt{41}$



مطابع الشركة القومية للتوزيع

د أ = $\sqrt{[٢-(٢)]^٢+[٤-٩]^٢}$ = $\sqrt{(٤)^٢+(-٥)^٢}$ = $\sqrt{٤١}$

∵ أب = ب جـ = جـ د = دأ = $\sqrt{٤١}$

∴ أب جـ د إما أن يكون مربعًا أو معينًا

لإثبات أن الشكل أب جـ د مربع نوجد طولى القطرين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$

أ جـ = $\sqrt{[-٧-٢]^٢+[٥-٤]^٢}$ = $\sqrt{٨٢}$

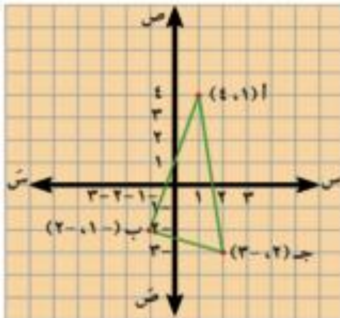
ب د = $\sqrt{[-٢-(-٣)]^٢+[-٩-٠]^٢}$ = $\sqrt{(-١)^٢+(٩)^٢}$ = $\sqrt{٨٢}$

∵ أ جـ = ب د = $\sqrt{٨٢}$ وأضلاع الشكل أب جـ د متساوية فى الطول

∴ الشكل أب جـ د مربع

مثال ٢

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢)، جـ (٢، -٣) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه



الحل

(أب)^٢ = (-١ - ١)^٢ + (-٢ - ٤)^٢ = ٤ + ٣٦ = ٤٠

(ب جـ)^٢ = [٢ − (-١)]^٢ + [-٣ - (-٢)]^٢ = ٩ + ١ = ١٠

(أ جـ)^٢ = (٢ − ١)^٢ + (-٣ - ٤)^٢ = ١ + ٤٩ = ٥٠

(أب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٤٠ + ١٠ = ٥٠ ، (أ جـ)^٢ = ٥٠

∵ (أ جـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢

∴ ق (∠ ب) = ٩٠° (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ م (△ أب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٤٠}$ × $\sqrt{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢$\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٠}$ = ١٠ وحدة مربعة

مثال ٣

أثبت أن النقط أ (٣، -١)، ب (-٤، ٦)، جـ (٢، -٢)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (-١، ٢)، ثم أوجد محيط الدائرة.

الحل

أ م = $\sqrt{(-١ - ٣)^٢ + [٢ - (-١)]^٢}$ = $\sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

ب م = $\sqrt{[-١ - (-٤)]^٢ + [٢ - ٦]^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

جـ م = $\sqrt{(-١ - ٢)^٢ + [٢ - (-٢)]^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

∵ أ م = ب م = جـ م = ٥

∴ أ ، ب، جـ تقع على دائرة مركزها م

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

٥ - ٢

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

سوف تتعلم

☆ كيفية إيجاد إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

☆ طرفا قطعة مستقيمة.

☆ إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة .

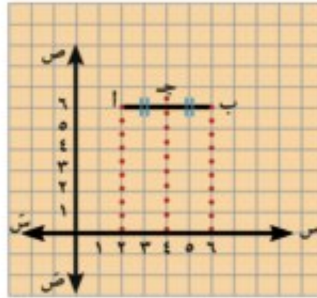
فكر وناقش

فى مستوى إحداثى متعامد: أوجد إحداثيي النقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ إذا كان:

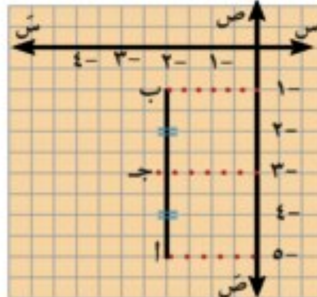
أولاً : أ (٢، ٦)، ب (٦، ٦)

ثانيًا : أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١)

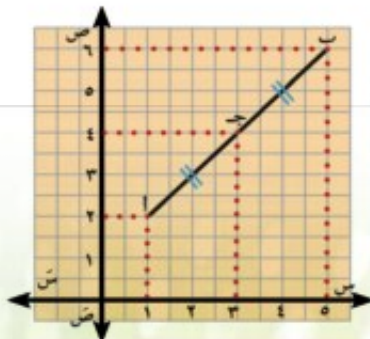
ثالثًا : أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)



أولاً : القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ(٢، ٦)، ب (٦، ٦) تـوازى محور السينات ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هى جـ (٤، ٦).



ثانيًا : القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١) تـوازى محور الصادات، ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هى جـ (-٢، -٣).



ثالثاً : فى الشكل المقابل :

نفرض أن نقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)، ومن الرسم نجد أن إحداثيي جـ هو (٣، ٤) .

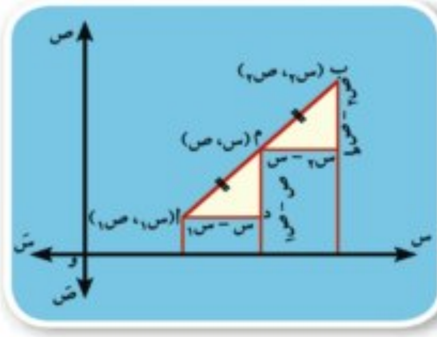
أى أن جـ $\left(\frac{١+٥}{٢}، \frac{٢+٦}{٢}\right)$ أى جـ (٣، ٤)

مطابع الشركة القومية للتوزيع

وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة كالآتى :

إذا كانت : أ (س$_1$، ص$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$)، م (س، ص) حيث

م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.



ومن تطابق المثلثين △ م د أ ، △ ب هـ م

نجد أن : أ د = م هـ

∴ س − س$_1$ = س$_2$ − س

∴ ٢س = س$_1$ + س$_2$ ∴ س = $\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}$

وبالمثل : م د = ب هـ ∴ ص − ص$_1$ = ص$_2$ − ص

∴ ٢ص = ص$_1$ + ص$_2$ ∴ ص = $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}$

م ($\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}$)

مثال : إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ وكان أ (٣، -٧) ، ب (-٥، -٣)

فإن إحداثيي منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي ($\frac{٣ - ٥}{٢}$ ، $\frac{-٧ - ٣}{٢}$) أي (-١، -٥)

مثال ١

إذا كانت جـ (٦، -٤) هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥، -٣) فأوجد إحداثيي نقطة ب .

الحل

نفرض أن ب (س$_2$، ص$_2$)، أ (٥، -٣)، منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي النقطة جـ (٦، -٤)

∵ س = $\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}$، ص = $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}$

∴ ٦ = $\frac{٥ + \text{س}_2}{٢}$ ∴ ٥ + س$_2$ = ١٢ ∴ س$_2$ = ١٢ -٥ = ٧

-٤ = $\frac{-٣ + \text{ص}_2}{٢}$ ∴ -٣ + ص$_2$ = -٨

ص$_2$ = -٨ + ٣ ص$_2$ = -٥

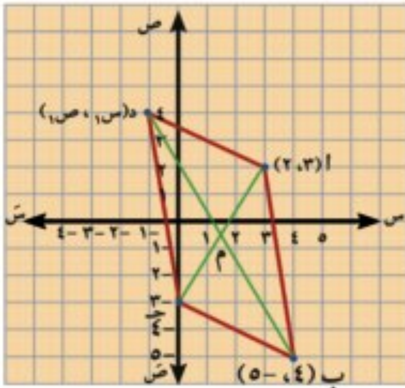
∴ ب (٧، -٥)

مطابع الشركة القومية للتوزيع

مثال٢

أب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٢)، ب (٤، -٥)، جـ (٠، -٣) - أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثيي نقطة د .

الحل



(٠،-٣)

الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه،

نفرض د (س$_1$، ص$_1$)

∵ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ م $\left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٢-٣}{٢}\right)$

∴ م $\left(\frac{٣}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

، م منتصف $\overline{\text{ب د}}$ ∴ م $\left(\frac{٤+\text{س}_1}{٢} ، \frac{-٥+\text{ص}_1}{٢}\right)$

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٤+\text{س}_1}{٢}$ ∴ ٣ = ٤ + س$_1$

∴ س$_1$ = -١

، $-\frac{١}{٢} = \frac{-٥+\text{ص}_1}{٢}$ ∴ -١ = -٥ + ص$_1$

∴ ص$_1$ = ٤

∴ إحداثي د (-١ ، ٤)

٥ - ٣

ميل الخط المستقيم

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فكر وناقش

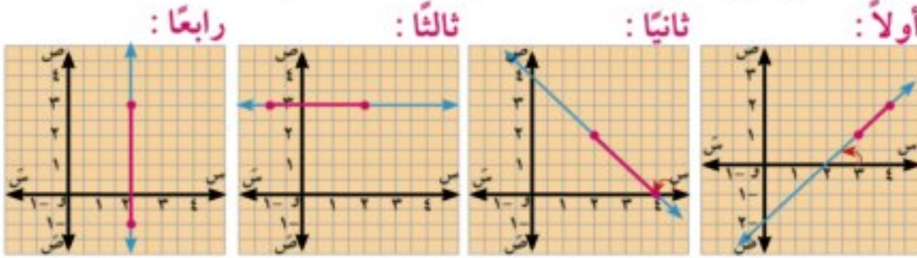
أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

أولاً : (٣، ١)، (٤، ٢) **ثانيًا** : (٤، ٠)، (٢، ٢)

ثالثًا : (-١، ٣)، (٢، ٣) **رابعًا** : (٢، -١)، (٢، ٣)

ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن رسم المستقيمات المارة بأزواج النقط السابقة فى المستوى الإحداثى المتعامد كما فى الأشكال الآتية :



القياس الموجب والقياس السالب للزاوية :



تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت مأخوذة فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

رقم الشكل	الميل ($\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$)، $س_٢ > س_١$	نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	ميل الخط المستقيم
أولاً	م = $\frac{٢ - ١}{٤ - ٣}$ = ١	حادة	أكبر من الصفر
ثانيًا	م = $\frac{٢ - ٠}{٢ - ٤}$ = -١	منفرجة	أقل من الصفر
ثالثًا	م = $\frac{٣ - ٣}{٢ + ١}$ = صفر	صفرية	يساوى صفرًا
رابعًا	م = $\frac{٣ + ١}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	قائمة	غير معرف

سوف تتعلم

- ☆ العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين.
- ☆ العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين.

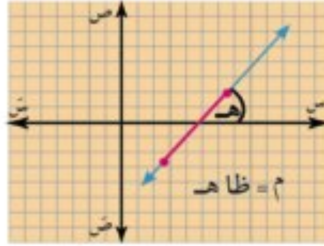
مصطلحات أساسية

- ☆ قياس موجب للزاوية.
- ☆ قياس سالب للزاوية.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ مستقيمان متوازيان.
- ☆ مستقيمان متعامدان.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؛
أى أن: ميل الخط المستقيم = ظا هـ
حيث هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٨ً ١٢َ ٥٦° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥ .

الحل

١ ∵ م = ظا هـ   ∴ م = ظا٤٨ً ١٢َ ٥٦° = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥

ابدأ → tan 56 °′″ 12 °′″ 48 °′″ =

٢ ∵ م = ظا هـ   ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦٥   ∴ ق(∠ هـ) = ١٣ً ٤َ ٥٦°

ابدأ → SHIFT tan 1.4865 = °′″

تدرب

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

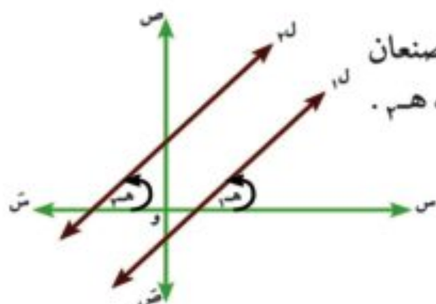
أ ٣٠°   ب ٤٥°   جـ ٦٠°

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية :

أ م = ٠,٣٦٧٣   ب م = ١,٠٢٤٦   جـ م = ٣,١٦٤٨

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين $ل_١$، $ل_٢$ ميلاهما $م_١$، $م_٢$، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما $هـ_١$، $هـ_٢$.

أكمل ما يأتى :

١ ق ($\angle$ $هـ_١$) = ق ($\angle$ $هـ_٢$) لأنهما ....

٢ ظا $هـ_١$ .... ظا $هـ_٢$

٣ $م_١$ .... $م_٢$

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان $ل_١$ // $ل_٢$ **فإن** $م_١ = م_٢$

أى أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان $م_١ = م_٢$ فإن $ل_١$ // $ل_٢$

أى أن: إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

أمثلة

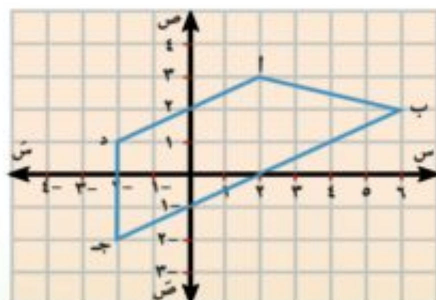
١ أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٣، -٢)، (٤، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥ °.

الحل

ميل المستقيم الأول ($م_١$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - (-٢)}{٤ - (-٣)} = \frac{٧}{٧} = ١$

ميل المستقيم الثانى ($م_٢$) = ظا ٤٥° = ١ $\because$ $م_١ = م_٢$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان .

٢ مثِّل بيانيًا النقط أ(٢، ٣)، ب (٦، ٢) جـ (-٢، -٢)، د (-٢، ١)، على المستوى الإحداثى، ثم أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .



الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$

ولإثبات ذلك تحليليًا نوجد ميل كل من $\overline{أد}$ ، $\overline{ب جـ}$.

ميل $\overline{أد}$ (وليكن $م_١$)

$\because م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ $\therefore م_١ = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

وميل $\overline{ب جـ}$ (وليكن $م_٢$)

$م_٢ = \frac{٢ + ٢}{٦ + ٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ $\because م_١ = م_٢$ ..... $\therefore \overline{أد} // \overline{ب جـ}$

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف ما لم تكن النقط أ، ب، جـ، د على استقامة واحدة .... (١)

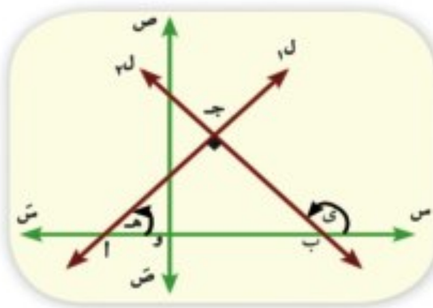
$\because$ ميل $\overline{أب} = \frac{٣ - ٢}{٢ - ٦} = \frac{١}{-٤}$، ميل $\overline{جـ د} = \frac{٢ + ١}{-٢ + ٢}$ ....(غير معرف)

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين............ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore$ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل المستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ الذى ميلاهما $م_١$، $م_٢$ حيث $ل_١ \perp ل_٢$.

أوجد العلاقة بين ق (∠ هـ) ، ق (∠ ى)

ثم أكمل الجدول الآتى باستخدام حاسبة الجيب:



قيم هـ	°٢٠	°٤٠	......	......	....
قيم ى	......	......	°١٤٠	°١٥٠	......
ظا هـ × ظا ى	......	......	......	......	......

من الجدول السابق نجد أن :

ظا هـ × ظا ى = -١ أى أن : $م_١ م_٢ = -١$

$ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ حيث $م_١$ ، $م_٢ \in ح^*$

إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ **فإن** $م_١ \times م_٢ = -١$

أى أن: حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١

وعكس ذلك صحيح؛ **فإذا كان** $م_١ \times م_٢ = -١$ **فإن** $ل_١ \perp ل_٢$

أى أن إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين = -١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

أمثلة

1. أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(٤ ، ٣\sqrt{٣})$ ، $(٥ ، ٢\sqrt{٣})$ عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°.

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول $م_١$ وميل المستقيم الثانى $م_٢$.

$\because م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ $\therefore م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = -\sqrt{٣}$

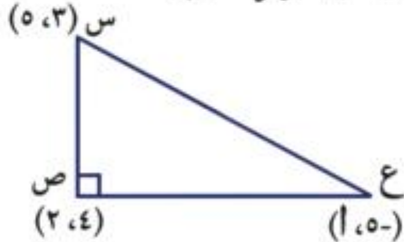
$\because م = ظاهـ$ $\therefore م_٢ = ظا ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان.

2. إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤ ، ٢)، س (٣ ، ٥)، ع (-٥ ، أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ.

الحل

نوجد ميل $\overleftrightarrow{س ص}$ فيكون $م_١ = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، نوجد ميل $\overleftrightarrow{ص ع}$ فيكون $م_٢ = \frac{أ - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{أ - ٢}{-٩}$



$\because \triangle$ س ص ع قائم الزاوية فى ص $\therefore م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore -٣ \times \frac{أ - ٢}{-٩} = -١$ $\therefore \frac{(أ - ٢)}{٣} = -١$

$\therefore أ - ٢ = -٣$ $\therefore أ = ٢ - ٣$ $\therefore أ = -١$

مطابع الشركة القومية للتوزيع

٥ - ٤

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهى :
أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠
وتمثيلها بيانيًا بخط مستقيم .

سوف تتعلم

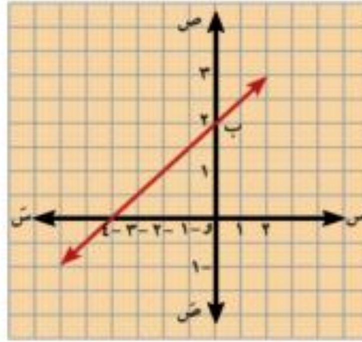
☆ كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

☆ معادلة خط مستقيم.
☆ ميل خط مستقيم.
☆ جزء مقطوع من محور الصادات .

مثال

مثِّل العلاقة : س -٢ص + ٤ = ٠ بيانيًا .
ومن الشكل البياني احسب :



أ) ميل الخط المستقيم .

ب) طول الجزء الرأسي المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتي :

بوضع ص = ٠ ∴ س + ٤ = ٠
∴ س = -٤ (-٤ ، ٠) يحقق العلاقة .
بوضع س = ٠ ∴ -٢ص + ٤ = ٠
∴ ٢ص = ٤ (٠، ٢) يحقق العلاقة

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) > ٠ ..... (لماذا؟)

فيكون م = $\frac{......}{......}$ = $\frac{......}{......}$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (جـ) و طوله يساوى ٢ وحدة طول .

و يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة :ص = م س + جـ

فيكون ٢ص = س + ٤ وبقسمة الطرفين على ٢ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

ونلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س و يساوى $\frac{١}{٢}$، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = ٢ وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق .

مطابع الشركة القومية للتوزيع

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) على الصورة:

ص = م س + جـ   حيث م، جـ ∈ ح

لاحظ أن : يمكن وضع معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر، ب ≠ ٠

على الصورة : ص = م س + جـ كالآتى :

أ س + ب ص + جـ = صفر   فيكون ب ص = - أ س - جـ

∴ ص = $-\frac{أ}{ب}$ س $-\frac{جـ}{ب}$

وهى على الصورة : ص = م س + جـ

حيث م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

، جـ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر بطريقتين ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

الحل

∵ معادلة الخط المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠، ب ≠ ٠

∴ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

∴ ٤ ص = -٣س +٥

ص = $\frac{-٣}{٤}$س + $\frac{٥}{٤}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، -٣)، ب (٥، -٤) .

الحل

∵ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ، ب = $\frac{-٤-(-٣)}{٥-٢}$ = $\frac{-٤+٣}{٥-٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ فيكون ميل المستقيم العمودى عليه = ٣

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١، ٢) فهى تحقق معادلته .

∴ ٢ = ٣ × ١ + جـ   ∴ جـ = ٢ - ٣ = -١

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣س -١

مطابع الشركة القومية للتوزيع

٣ إذا كانت أ (-٣، ٤)، ب (٥، -١)، جـ (٣، ٥) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل

نقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = ($\frac{٣+٥}{٢}$ ، $\frac{٥-١}{٢}$) = ($\frac{٨}{٢}$ ، $\frac{٤}{٢}$) = (٤، ٢)

∴ ميل الخط المستقيم المطلوب = $\frac{٢-٤}{٤+٣}$ = $\frac{-٢}{٧}$

∵ ص = م س + جـ ∴ ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ ٤ = $\frac{-٢}{٧}$ × -٣ + جـ ∴ ٤ = $\frac{٦}{٧}$ + جـ ∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة : ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$ وبضرب طرفى المعادلة فى ٧

∴ ٧ص = - ٢س + ٢٢ أى المعادلة هى : ٢س + ٧ص - ٢٢ = ٠

مطابع الشركة القومية للتوزيع

الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى: العلاقات والدوال

حاصل الضرب الديكارتي

تمارين (١ ـ ١)

أولاً : أكمل ما يأتي

١ إذا كان (أ + ٥، ٣) = (٨، ب - ١) فإن أ =..........، ب =............

٢ إذا كان (س^٥، ص +١) = (٣٢، $\sqrt[3]{27}$) فإن س =........، ص =............

٣ إذا كانت (س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣) فإن $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ =............

٤ إذا كانت ن (س^٢) = ٩، فإن ن (س) =............

٥ إذا كانت س × ص = {(٢، ٦)، (٢، ٩)، (٣، ٦)، (٣، ٩)، (٥، ٦)، (٥، ٩)}، فإن
س =............
ص =............،

٦ إذا كانت ص × س = {(٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٤، ٣)
، (٤، ٤) ، (٤، ٥) }، فإن س =............
ص =............،

ثانيًا: اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:

1. إذا كان ن (س) = ٣، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) تساوي

أ ٤ ب ٩ جـ ١٥ د ٣٦

2. إذا كان (٣، ٥) ∈ {٣، ٦} × {س، ٨} فإن س =

أ ٨ ب ٦ جـ ٥ د ٣

3. إذا كانت النقُطة (٥، ب - ٧) تقع على محورِ السينات فإن ب =

أ ٢ ب ٥ جـ ٧ د ١٢

4. إذا كانت النقُطة (س- ٤، ٢ - س) حيث س ∈ ص تقع في الربع الثالثِ فإن س تساوي:

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٦

ثالثاً:

1. إذا كانت س = {٢، ٣}، ص {٣، ٤، ٥} أوجد:

أ س × ص ومثّله بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. ب ن (س × ص)

جـ ن (ص^٢) د (س × ص) ∩ ص^٢

2. إذا كان س × ص = { (١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)} أوجد:

أ س، ص ب ص × س جـ ص^٢

3. إذا كان: س = {٣، ٤}، ص = {٤، ٥}، ع = {٦، ٥} فأوجد:

أ س × (ص ∩ ع) ب (س - ص) × ع جـ (س - ص) × (ص - ع)

4. على شبكةٍ بيانيةٍ متعامدةٍ لحاصل الضرب الديكارتي ع × ع عين النقط الآتية:

أ (٤، ٥)، ب (٦، -٣)، جـ (-٢، ٧)، د (-١، ٦)، هـ (-٤، -٥)، م (٠، ٦)، ك (٩، ٠)

ثم اذكر الربعَ الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط.

5. إذا كانت س = {١، ٥، ٦}، ص {٢، ٤، ٥} فأوجد:

أ س × ص ب ص × س ومثّله بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

جـ ن (س × ص)

6. إذا كانت س = [- ٢، ٣]، أوجد المنطقة التي تمثل س × س.

بين أي من النقاط التالية تنتمي إلى حاصل الضرب الديكارتي س × س

أ (١، ٢)، ب (٣، - ١)، جـ (- ١، ٤)، د (-٢، ٠)

العلاقات

تمارين (١ ـ ٢)

١ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {١٢، ٢١، ٤٧، ٥٢}، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني : (ا رقم من أرقام العدد ب)، لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ

اولاً : اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

ثانياً : بين أي مما يلي صواب مع ذكر السبب:

١ ع ٥٢ ٢ ع ٢١ ٣ ع ٤٧

٢ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠}، وكانت ع علاقة على سـ حيث ا ع ب تعني **(ا مضاعف ب)**، لكل ا، ب∈ سـ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٣ إذا كانت سـ = {٢، ٤، ٥، ٧}، صـ = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني (ا≥ ب)، لكل ا، ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيانَ ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٤ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني: **«العدد ا هو المعكوس الضربي للعدد ب»** لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بين ع ومثلها بمخطط سهميٍّ وآخر بياني.

٥ إذا كانت سـ = {١، ٣، ٤، ٥}، صـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني «ا+ب = ٧» لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٦ إذا كانت سـ = {-١، ٠، ١، ٢، ٣}، صـ = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني «ا^٢ = ب» لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

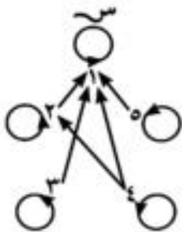
٧ إذا كانت سـ = {-٢، -١، ١، ٢}، صـ = {$\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{٣}$، ١، ٣، ٨} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني «ا^٣ = ب» لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيانَ ع ومثلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٨ إذا كانت سـ = {٢، ٣، ٤}، صـ = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ا ع ب تعني «**ا تقسم ب**» لكل ا ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع .

٩ **الشكلُ المقابلُ:**

يمثل المخططُ السهميُّ للعلاقة ع المعرفة على المجموعة سـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

اكتب بيان ع ومثلها بمخططٍ بياني.



الدالة (التطبيق)

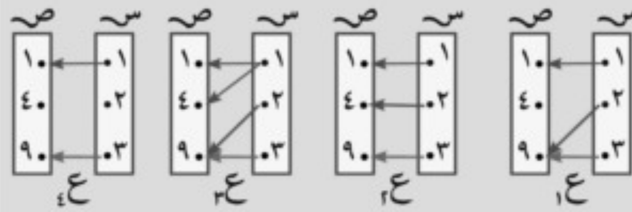
هل تعلم أن: د: س ← ص وتقرأ: «د دالة من س إلى ص».

أ، د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

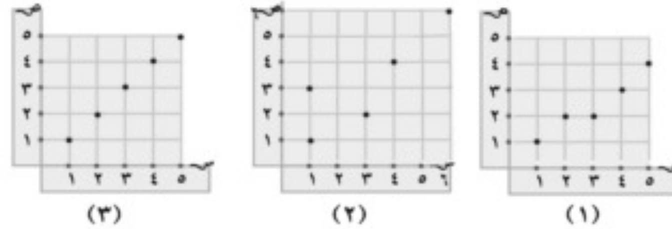
مدى الدالة د هو مجموعةُ صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د

تمارين (١ ــ ٣)

① أي من العَلاقاتِ التالية تمثِّل دالة من س إلى ص؟ و إذا كانت العلاقةُ تمثلُ دالةً، فأوجد مدى الدالة.



② أي من العَلاقاتِ التالية تمثِّل دالة من س إلى ص؟ و إذا كانت العلاقةُ تمثلُ دالةً، فأوجد مدى الدالة.



③ إذا كانت س = {٢، ٥، ٨}، ص = {١٠، ١٦، ٢٤، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ عامل من عوامل ب » لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. **هل ع دالة ؟ ولماذا ؟**

④ إذا كانت س = {٠، ١، ٤، ٧}،ص = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع عَلاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «أ + ب < ٨» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ، ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

⑤ إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠} وكانت ع عَلاقة على س حيث أ ع ب تعني: «أ مضاعف ب» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ، ومثِّلها لمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

⑥ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٦، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني : «أ + ٢ ب = عدد فردي» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخططٍ سهميٍّ. **هل ع دالة؟ ولماذا ؟**

دوال كثيرات الحدود

تمارين (١ ـ ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي :

① الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص=٢ س - ١ يمثلها بيانيًا خطٌ مستقيمٌ يقطع محورَ الصادات في النقط ....

② الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص=٣ س+٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

③ إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخطِّ المستقيمِ الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٤ س - ٥ فإن أ تساوي ....

ثانيًا: ① إذا كان د : ح ← ح ، اذكر درجة د ثم أوجد د (-٢) ، د (٠) ، د ($\frac{1}{2}$) حيث:

أ د (س) = ٣ ب د (س) = ٣ - ٢ س جـ د (س) = س٢ - ٤

② مَثِّل بيانيًا الدوالَّ الخطيةَ الآتيةَ، وأوجد نقطَ تقاطعِ المستقيم الممثل لكلٍّ منها مع محوري الإحداثيات:

أ د (س) = ٢ س ب د (س) = - $\frac{1}{2}$ س جـ د (س) = ٢ س + ١

د د (س) = ٢ - س هـ د (س) = ٣ س - ١ و د (س) = - ٢ س + ٣

③ مَثِّل بيانيًا كلاً من الدوالِّ الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

أ د (س) = س٢ - ٢ متخذاً س∈ [-٣ ، ٣] ب د(س) = (س - ٢)٢ متخذاً س ∈[- ١ ، ٥]

جـ د (س) = س ٢ + ٢ س + ١ متخذاً س∈ [- ٤ ، ٢] د د (س) = ٢ - س٢ متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣]

نشاط

الربط بالتكنولوجيا

استخدام برامج الحاسوب:

توجد العديدُ من البرامج المجانية لرسم المنحنيات وحل المعادلات، وهي متوفرةٌ على الشبكة العنكبوتيةِ ومنها البرنامج المجاني: الرياضيات للجميع (GeoGebra) وموقعه على الشبكة: http://www.geogebra.org والبرنامج يدعم باللغة العربية.

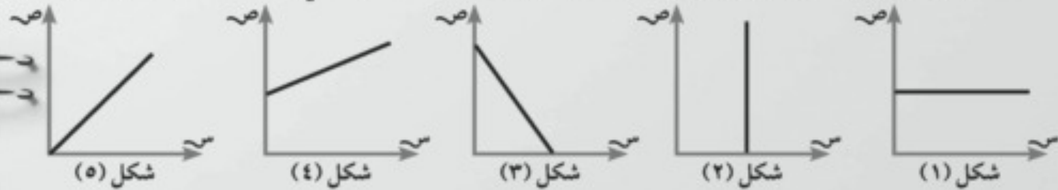
باستخدام البرنامج مثل بيانيًّا كلاً من الدوال الآتية:

(١) د (س) = ٢ س + ١ (٢) د (س) = ٥ - ٣ س

(٣) د (س) = $س^٢$ - ٣ س + ٢ (٤) د (س) = ٤ - ٣ س - $س^٢$

نشاط

(١) شركةٌ لرصفِ الطرق تتقاضى ١٠٠٠٠٠ جنيه (رسم ثابت) ثم ٣٠ جنيهًا لكلِّ مترٍ فإذا كان س (طول الطريق المرصوف بالأمتار)، ص (التكلفة الكلية التي تأخذها الشركة بالجنيهات).



أولاً: الشكلُ الذي يمثل العلاقةَ بين س ، ص هو الشكل رقم ....

ثانيًا: أيٌّ من العلاقات الآتيةِ تمثِّل المعلوماتِ السابقةَ:

(أ) ص = ٣٠ س (ب) ص = ٣٠س + ١٠٠٠٠٠ (جـ) ص = ١٠٠٠٠٠ س + ٣٠ (د) ص = ٣٠٠٠٠٠٠ س

ثالثًا: اكتب مقالاً تتناولُ فيه مدى جهودِ الدولة في تطوير ورصف الطرق حتى تكونَ سريعةً وآمنة، وما ينبغي عليك من اتباع تعليمات المرور في السير والمحافظة على نظافةِ وسلامةِ هذه الطرق.

اختبار الوحدة

١ إذا كانت سـ = {٠، ١، ٤، ٧}، صـ = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع علاقة من سـ إلى صـ، حيث أ ع ب تعني: «أ + ب < ٦» لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة؟ اذكر السَّبب.

٢ مثل بيانيًا كلاً من الدوالِّ الآتية:

أ د (س) = ٣ س - ١

ب د (س) = - ٢ س

جـ د (س) = س^{٢} - ٣ متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣]

د د (س) = ١ - ٣ س + س^{٢} متخذاً س ∈ [-١ ، ٤]

٣ أثناء قراءةِ كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقةُ بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:

أ مثل العلاقة بين ن ، ص بيانيًا ثم أوجدَ العلاقةَ الجبرية بينهما.

ب ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب؟

جـ كم عدد صفحات الكتابِ المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟

٤ **الشكلُ المقابلُ**: يمثِّل منحنى الدالة د حيث:

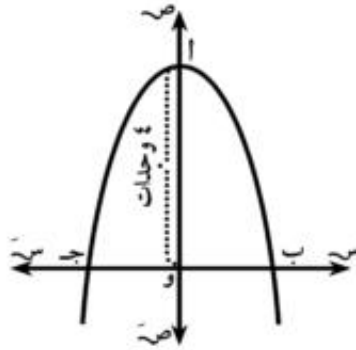
د (س) = م - س^{٢}، إذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجد:

أ قيمة م.

ب إحداثيي ب، جـ

جـ مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، جـ .



الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

النسبة

تمارين (٢ ــ ١)

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣؛ **أوجد العددين؟**

٢ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، و إذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ ؛ **أوجد** العددين.

٣ **أوجد** العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

٤ **أوجد** العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٥ **أوجد** العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

التناسب

تمارين (٢ ـ ٢)

١ إذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة فأثبت أن:

أ $\left(\frac{س+ص}{ع+ل}\right)^{٢} = \frac{٢س^{٢}-٣ص^{٢}}{٢ع^{٢}-٣ل^{٢}}$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥س^{٣}-٣ع^{٣}}{٥ص^{٣}-٣ل^{٣}}} = \frac{س+ع}{ص+ل}$

٢ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأثبت أن:

أ $\frac{٢ص-ع}{٣س-٢ص+ع} = \frac{١}{٢}$

ب $\sqrt{٣س^{٢}+٣ص^{٢}+ع^{٢}} = ٢س+ص$

٣ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن:

أ $\frac{أجـ}{ب د} = \left(\frac{أ-جـ}{ب-د}\right)^{٢}$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥أ^{٣}-٣جـ^{٣}}{٥ب^{٣}-٣د^{٣}}} = \frac{أ+جـ}{ب+د}$

٤ إذا كانت ب هى الوسط المتناسب بين أ، جـ فأثبت أن:

أ $\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-١}+ب^{-١}+جـ^{-١}} = ب^{٢}$

ب $\frac{٢جـ^{٢}-٣ب^{٢}}{٢ب^{٢}-٣أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ^{٢}}{ب^{٢}}$

٥ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل؛ فأثبت أن:

أ $\frac{أب-جـ د}{ب^{٢}-جـ^{٢}} = \frac{أ+جـ}{ب}$

ب $\frac{أ^{٢}-٣جـ^{٢}}{ب^{٢}-٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$

جـ $\frac{أ}{ب+د} = \frac{جـ^{٣}}{جـ^{٢}د+د^{٣}}$

د $\frac{جـ^{٢}-د^{٢}}{أ-جـ} = \frac{ب د}{أ}$

٦ إذا كانت: ٥أ، ٦ب، ٧جـ، ٨د كميات موجبة فى تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٨د}} = \sqrt{\frac{٥أ+٦ب}{٧جـ+٨د}}$

٧ إذا كانت: $\frac{ص}{س-ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س+ص}{ع}$ فأثبت أن كلاً من هذه النسب يساوى ٢ (ما لم تكن: س + ص = ٠)

ثم أوجد س : ص : ع

٨ إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ-ب+٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س.

٩ إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

التغير الطردي و التغير العكسي

تمارين (٢ ـ ٣)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

(١) أى من الأشكال البيانية الأتية تمثل تغيرا طرديا بين س، ص:



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص، س هى:

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

(٣) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التناسب يساوى:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٦

ثانيًا: (الحساب العقلي): من بيانات الجدول التالى أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

(أ) بين نوع التغير بين ص، س (ب) أوجد ثابت التناسب

(جـ) أوجد قيمة ص عندما س = ٣ (د) أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

تمارين عامة على الوحدة

(١) إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين س؛ **فاختر الإجابة الصحيحة:**

(أ) ص = أ س (ب) ص = $\frac{أ}{س}$

(جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠) (د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

(٢) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ **فأوجد** س عندما ص = ٨٠

(٣) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا فى ٦ ساعات؛ **فكم** كيلو مترًا تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات؟

(٤) إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر) ، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر؛ **فماذا** يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

(٥) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت ص =٢ عندما س =٤ **فأوجد** قيمة ص عندما س = ١٦

(٦) إذا كانت أ، ب، جـ، د، فى تناسب متسلسل **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{أ^{٢} - ٣جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$ (ب) $\frac{٢أ + ٣د}{٣أ - ٤د} = \frac{٢أ^{٣} + ٣ب^{٣}}{٣أ^{٣} - ٤ب^{٣}}$

(٧) إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$ **فأثبت أن** $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$.

(٨) **الربط بالهندسة:** س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة فى مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ **فأوجد** س : ص.

(٩) **تطبيقات حياتية:** فى مجال اهتمام الدولة بالريف المصرى، رصدت الدولة مبلغ ١,٨٥ × $١٠^{٦}$ جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب؛ **فما** هى تكاليف كل منها؟

(١٠) **تطبيقات حياتية:** إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٦ عمال فى أربع ساعات، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل؟

مطابع الشركة القومية للتوزيع

نشــاط



(١) (حساب عقلى) من بيانات الجدول الآتى: أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

أ بين مع ذكر السبب أن التغير بين س، ص تغير عكسى.

ب اكتب ثابت التغير.
جـ اكتب العلاقة بين س ، ص.

د أوجد قيمة ص عندما س = ٤٨
هـ أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

(٢) إذا كانت نسبة النجاح فى إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هى ٨٣ ٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩ ٪، ونسبة النجاح للبنات ٨٩ ٪ فأوجد

أولا: نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات فى هذه المحافظة.

ثانيا: النسبة بين عدد البنين و عدد البنات فى هذة المحافظة

اختبار الوحدة

(١) إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$ فاثبت أن: $\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

(٢) إذا كان ص = أ - ٩ وكان ص $\propto \frac{١}{س^٢}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

(٣) إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص $\propto$ ع.

(٤) إذا كان $س^٤ ص^٢ - ١٤ س^٢ ص + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن ص $\propto \frac{١}{س^٢}$

(٥) الربط بالفلك: إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان $و_١$ = ١٨٢ كجم، $ر_١$ = ٣٥ كجم فأوجد $ر_٢$ عندما $و_٢$ = ٣١٢ كجم.

(٦) الربط بالفيزياء: إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث عندما نق = ٣ سم. أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم.

الوحدة الثالثة: الإحصاء

جمع البيانات

تمارين (٣ ـ ١)

١ قارن بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينًا مزايا وعيوب كل منهما.

٢ ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها فى مستوى الخدمة المقدمة لهم، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠، واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة.

٣ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ؛ فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

التشتت



الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ، ب فى الصف الثالث الإعدادى فى أحد الاختبارات:

فصل أ

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

فصل ب

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

١ **مثل** كلاً من التوزيعين بالمضلع التكرارى على شكل واحد.

٢ **أوجد** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من التوزيعين التكراريين.

٣ **أى** الفصلين أكثر تجانسًا فى مستوى التحصيل؟

تمارين (٣ ـ ٢)

١ **احسب الانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:**

أ ١٦، ٣٢، ٥، ٢٠، ٢٧

ب ٧٢، ٥٣، ٦١، ٧٠، ٥٩

جـ ١٥، -١٢، -٩، ٢٧، -٦

د ٢٢، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ١٨

٢ **إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = صفرًا، فماذا تستنتج؟**

٣ **التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة:**

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦



احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

٤ **التوزيع التكرارى التالى يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس:**

الوزن بالكيلو جرام	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	٧٥-٨٥	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

أوجد: أ الوسط الحسابى لأوزان التلاميذ. ب الانحراف المعيارى لأوزان التلاميذ.

تمارين عامة على الوحدة

١ اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات فى كل من:

أ معرفة نوعية القمح قبل شرائه.

ب معرفة درجة ملوحة مياه البحر.

جـ معرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها.

٢ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالى:

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة؛ أوجد حجم العينة كلها.

٣ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية:

٢٣، ١٢، ١٧، ١٣، ١٥، ١٦، ٨، ٩، ٣٧، ١٠

٤ فيمايلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات.

٥ التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات:

عدد الكيلو مترات لكل لتر	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلو مترات لكل لتر.

الربط بالتكنولوجيا

استخدام برامج الحاسب الآلى لحساب الانحراف المعيارى.

أولاً: ابدأ (**Start**) ثم برامج (**programs**) ثم الجداول الإلكترونية (**Excel**) فتظهر الشاشة التالية:

١



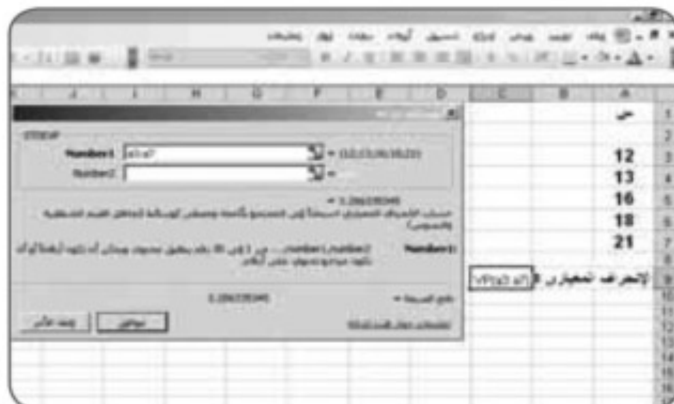
- أدخل بيانات مثال (١) فى المدى (A3 , A7) كما بالشكل
- من قائمة إدراج (**insert**)، اختر دالة ($\mathcal{F}$x) ثم إدخال

٢



- من مربع حوار البحث عن دالة، اختر الدالة**STDEVP** ثم إدخال

٣



- لحساب الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات حدد نطاق المتغير (A3 , A7) ثم إدخال

٤



- لاحظ أن الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات = ٣,٢٨٦٣٣٥ وهو نفس الناتج السابق حسابه فى مثال (١) باستخدام الحاسبة.





نشـــاط

(١) باستخدام أسلوب العينات اختر عينة عشوائية من زملائك بالفصل حجمها ١٠ مفردات ثم قس أطوالهم بالسنتيمترات، واحسب متوسط طول زملائك بالفصل. **قارن** بين النتائج التى حصلت عليها والنتائج الأخرى التى حصل عليها زملاؤك. فسر إجابتك.

(٢) الجدول المقابل يبين درجات الحرارة على بعض المدن.

أ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى.

ب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى.

(يمكنك تتبع النشرة الجوية اليومية وحساب الإنحراف المعيارى لها)

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

اختبار الوحدة

(١) **اشرح بإيجاز العينة العشوائية البسيطة مبينًا كيف يتم اختيارها.**

(٢) **احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:**

أ ٦٥، ٦١، ٧٠، ٦٤، ٧٠، ٧٦، ٧٠ ب ٣٩، ٨٥، ٤٦، ٩١، ٨٨، ٥٠، ٧٧

أى المجموعتين أ، ب أكثر تجانسًا؟

(٣) **للتوزيع التكرارى التالى احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى:**

المجموعة	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

(٤) **قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة مايفضلون تناوله فى فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من:**

أ مشروبات ساخنة ب وجبات خفيفة جـ مثلجات

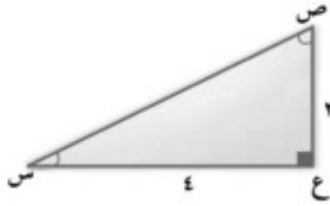
حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

الوحدة الرابعة :حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تمارين (٤ ـ ١)



١ فى الشكل المقابل : أكمل

أ جا س = ... ب جتا س = ...

جـ ظا س = ... د جتا ص = ...

هـ ظا ص = ... و جا ص = ...

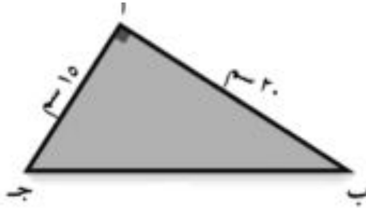
٢ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

٣ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ **فأوجد** القياس الستينى لكل زاوية من زواياه.

٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جا حـ ، جتا أ ، جتا حـ ، ظا حـ .

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ
فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .



⑦ **فى الشكل المقابل :**

ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ا) = ٩٠° ، ا جـ = ١٥سم ، ا ب = ٢٠سم

أثبت أن : جتا حـ جتا ب - جا حـ جا ب = صفر

⑧ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم

أوجد قيمة : ا ظا س + ظا ع ‌‌ ب جتا س جتا ع - جا س جا ع

جـ جا س جتا ع + جتا س جا ع

⑨ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم ،

أوجد قيمة كل من : ا ظا س × ظا ص ‌‌ ب جا^{2}س + جا^{2}ص

⑩ ا ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{اء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، اء = ٤سم ، ا ب = ٥سم، ب جـ = ١٢سم

أثبت أن : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا حـ}}{\text{جا}^2\text{ حـ + جتا}^2\text{ ب}}$ = ٣

⑪ ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢سم ، رسم $\overleftrightarrow{اء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{اء}$ ∩ $\overline{ب جـ}$ = {ء}

أولاً: أوجد قيمة : جا (∠ جـ ا ء) ، جتا (∠ جـ ا ء) ، ظا (∠ جـ ا ء)

ثانياً: أثبت أن: ا جا^2 جـ + جتا^2 جـ = ١ ‌‌ ب جا ب + جتا جـ > ١

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

تمارين (٤ ـ ٢)

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠ س) = ...

٢ إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق(∠ س) = ...

٣ جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = ...

٤ إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠ س) = ...

٥ إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠ س) = ...

٢ أوجد قيمة المقدار التالى مبيناً خطوات العمل

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا^{٢} ٣٠°

٣ أثبت أن:

أ جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠° + جتا^{٢} ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

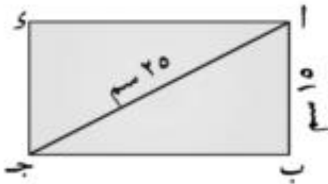
٤ أوجد قيمة س اذا كان:

٤س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥°

٥ أوجد هـ ، حيث هـ زاوية حادة.

جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

٦ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:

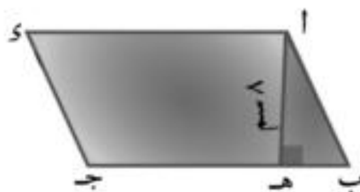


ا ب جـ ء مستطيل فيه ا ب = ١٥سم ، ا جـ = ٢٥سم .

أوجد : أولاً: ق(∠ ا جـ ب)

ثانياً: مساحة سطح المستطيل ا ب جـ ء .

٧ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:



ا ب جـ ء متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم^{٢} ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

$\overline{اهـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ا هـ = ٨سم

أوجد : أولاً: طول $\overline{ا ء}$ **ثانياً:** ق(∠ ب)

ثالثاً: طول $\overline{ا ب}$ لأقرب رقم عشرى واحد **(استخدم أكثر من طريقة)**



نشـــاط

قطعة أرض على شكل شبه منحرف ا ب جـ ى فيها $\overline{\text{اى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ،

اى = ١٨مترًا ، ب جـ = ٣٣متر

ى جـ = ٢٥متر

المطلوب : ا إيجاد طول $\overline{\text{ا ب}}$.

ب ق(∠جـ).

جـ إذا أراد صاحب قطعة الأرض عمل نافورة دائرية الشكل داخلها ،

فما أكبر مساحة ممكنة لهذه النافورة ؟ ثم أوجد مساحة الجزء المتبقى من قطعة الأرض.

(π = ٣,١٤)

اختبار الوحدة

① **أثبت صحة كل من المتساويات الآتية ، مبينا خطوات الحل :**

ا جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° ب ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ - ظا}^{2}\text{ ٣٠°}}$

② **بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التى تحقق كلاً من :**

ا ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠° ب ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

③ ا ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا جـ = ١٢,٦سم ، ق(∠جـ) = ٢٤َ ٨٤° .
أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

④ ا ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{\text{اى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، فإذا كان ا ب = ٣سم ، اى = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم . **أثبت أن :** جتا (∠ى جـ ب) - ظا (∠ا جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

⑤ سُلَّم $\overline{\text{ا ب}}$ طوله ٦أمتار يستند طرفه العلوى ا على حائط رأسى وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هى مسقط نقطة ا على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{\text{ا جـ}}$.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

تمارين (٥ – ١)

أولاً: أكمل ما يأتى:

١) البعد بين النقطة (-٣، ٤) ونقطة الأصل يساوى ....

٢) البعد بين النقطتين (- ٥، ٠)، (٠، ١٢) يساوى ....

٣) البعد بين النقطتين (١٥، ٠)، (٦، ٠) يساوى ....

٤) طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوى ....

٥) إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠)، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة؛ فإن أ = ...

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١) النقط (٠، ٠)، (٦، ٠)، (٠، ٨) :

أ) تكون مثلث منفرج الزاوية   ب) تكون مثلث حاد الزوايا

جـ) تكون مثلث قائم الزاوية   د) تقع على استقامة واحدة

٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة ، فأى من النقط الآتية تنتمى للدائرة ؟

أ) (١، ٢)   ب) (- ٢، ١)   جـ) ($\sqrt{3}$، ١)   د) ($\sqrt{2}$، ١)

٣) بَيِّنْ أيًّا من مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

أ) (١، ٤)، (٣، - ٢)، (- ٣، ١٦)   ب) (٧، ٠)، (- ٣، - ٣)، (٢٢، ٩)

جـ) (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٢ ، ٢)   د) (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٠، - ٢)

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (-٢، ٣) يساوى ٥

ب إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣ أ -١، -٥) يساوى ١٣

٢ إذا كانت أ (س، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (٥، ١) وكانت أ ب = ب جـ؛ فأوجد قيمة س.

٣ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (٦، ١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ ؛ فأوجد قيمة س .

٤ بَيِّنْ نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى زواياه :

أ أ (٣، ١٠)، ب (٨، ٥)، جـ (٥، ٢) ب أ (١، -١)، ب (٢، ١)، جـ (-٣، -٢)

جـ أ (٣، ٣)، ب (٤، -١)، جـ (١، ١)

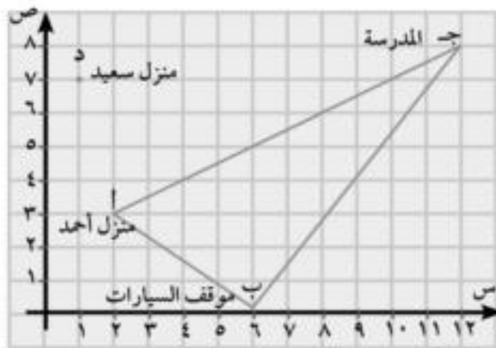
٥ بَيِّنْ نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (- ٢، ٤)، ب (٣، - ١)، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه .

٦ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، -٥)، ب (- ١، ٧)، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد مساحته .

٧ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ(٥، ٣)، ب (٦، -٢)، جـ (١، -١)، د (٠، ٤) اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين، ثم أوجد مساحته .

٨ أثبت أن النقط أ(-٢، ٥)، ب (٣، ٣)، جـ (-٤، ٢) ليست على استقامة واحدة، و إذا كانت د (-٩، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع .

٩ فى الشكل المقابل :



أ أوجد إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد وموقف السيارات والمدرسة .

ب بعد منزل أحمد عن المدرسة .

جـ بعد منزل سعيد عن المدرسة.

د أيهما أقرب: منزل أحمد عن المدرسة أم منزل سعيد عن المدرسة ؟

هـ هل الطريقان $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$ متعامدان ؟ اذكر السبب.

١٠ إذا كانت أ، ب، جـ، د أربع نقط معلومة فى مستوى إحداثى متعامد ؛ فحدد الشروط التى تجعل هذه النقط رؤوسًا لكل من الأشكال الهندسية الآتية :

١ متوازى أضلاع ٢ مستطيل ٣ معين ٤ مربع

مطابع الشركة القومية للتوزيع

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تمارين (٥ ـ ٢)

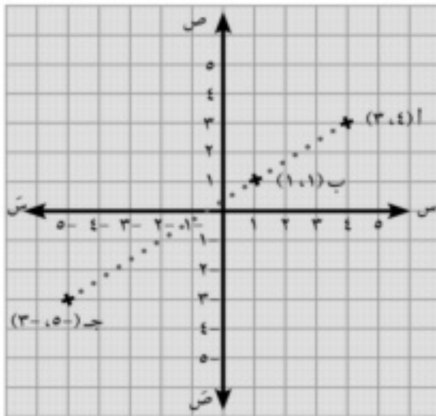
أولا : أكمــل

أ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٥، -٢) فإن إحداثيى النقطة ب هى ....

ب **إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط على استقامة واحدة**
، كان أب = ب جـ = جـ د، أ(١، ٣)، جـ (٥، ١) أوجد :
أولاً : إحداثيى النقطة ب هى (........، ....)
ثانيًا : إحداثيى النقطة د هى (........، ....)

جـ $\overline{أد}$ متوسط فى △ أب جـ، م منتصف $\overline{أد}$
حيث أ (٠، ٨)، ب (٣، ٢)، جـ (-٣، ٦) أوجد :
أولاً : إحداثيى نقطة د هى (.......، ....)
ثانيًا : إحداثيى نقطة م هى (........، ....)
تحقق بتعين إحداثيات النقط.

د لاثبات أن النقط أ (٤، ٣)، ب(١، ١)، جـ (-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة



أكمل :

أب = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (١ - ٣)^٢}$ = ...

ب جـ = $\sqrt{(-٥ - ١)^٢ + (-٣ - ١)^٢}$ = ...

أ جـ = $\sqrt{(-٥ - ٤)^٢ + (-٣ - ٣)^٢}$ = ...

∴ أب + ب جـ = ... + ... = ...

∵ أب + ... = أ جـ

∴ النقط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

هـ أوجد إحداثيى نقطة جـ حيث جـ منتصف $\overline{أب}$ فى الحالات الآتية :

① أ(٢، ٤)، ب (٦، ٠) ، جـ (.....، .....)
② أ (٧، -٥)، ب (-٣، ٥) ، جـ (.....، .....)
③ أ(-٣، ٦)، ب (٣، -٦) ، جـ (.....، .....)
④ أ (٧، -٦)، ب (-١، ٠) ، جـ (.....، .....)

ثانيًا : (١) إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س، ص فى كل من الحالات الآتية :

أ : أ (١، ٥) ، ب (٣، ٧) ، جـ (س، ص)

ب : أ (-٣، ص) ، ب (٩، ١١) ، جـ (س، -٣)

جـ : أ (س، -٦) ، ب (٩، -١١) ، جـ (-٣، ص)

د : أ (س، ٣) ، ب (٦، ص) ، جـ (٤، ٦)

(٢) إذا كانت أ (١، -٦)، ب (٩، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{أب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول .

(٣) أثبت أن النقط أ (٦، ٠)، ب (٢، -٤)، جـ (-٤، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلاً .

(٤) إذا كانت النقط أ(٣، ٢)، ب (٤، -٣)، جـ (-١، -٢)، د (-٢، ٣) هى رؤوس معين ؛ فأوجد :

أ إحداثيى نقطة تقاطع القطرين .

ب مساحة المعين أ ب جـ د.

(٥) أثبت أن النقط أ (-٣، ٠)، ب (٣، ٤)، جـ(١، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{ب جـ}$.

(٦) إذا كانت أ (-١، -١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠)، د (٣، -٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد . أثبت أن $\overline{أ جـ}$، $\overline{ب د}$ ينصف كل منها الآخر ، ثم عين نوع الشكل.

(٧) أثبت أن النقط أ (٥، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٢، -٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د معينًا وأوجد مساحة سطحه .

(٨) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٤)، ب (٢، -١)، جـ (-٤، -٣) ؛ أوجد إحداثيى د .

خذ هـ $\in \overleftarrow{أد}$ حيث أهـ = ٢ أد . ما إحداثيًا النقطة هـ ؟

ميل الخط المستقيم

تمارين (٥ ـ ٣)

أولاً : أكمـل ما يأتى

١ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ يساوى ....

٢ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ يساوى ....

٣ ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (-٢، ٣) يساوى ....

٤ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨، ٣)، ب (٢، ك) فإن ك = ...

٥ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (م، ٤)، د (-٥، ٧) فإن م تساوى .....

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يساوى ....

٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ، ٠)، (٠، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ = ...

ثانيًا :

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (- ٣، ٤)، جـ (- ٣، - ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢)، د (- ٣، ٢) .

٢ إذا كانت أ (- ١، - ١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

٣ إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°؛ فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$، $ل_٢$:

أ متوازيين ب متعامدين

٤ إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ.

٥ أثبت أن النقط أ (- ١، ١)، ب (٠، ٥)، جـ (٤، ٢)، د (٥، ٦) هى رؤوس لمتوازى أضلاع.

٦ أثبت باستخدام الميل أن النقط ا (- ١، ٣)، ب (٥، ١)، جـ (٦، ٤)، د (٠، ٦) هى رؤوس مستطيل .

٧ فى الشكل المرسوم :
أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$ ،
أ(٩، -٢)، ب (٣، ٢)، جـ (س، -س)،
د (٤، -٣)، أوجد إحداثيى نقطة جـ .



٨ أثبت أن النقط أ (٤ , ٣)، ب (٧، ٠)، جـ (١، -٢) هى رؤوس مثلث . و إذا كانت نقطة د (١، ٢) فأثبت أن الشكل اب جـ د شبه منحرف وأوجد النسبة بين أد ، ب جـ .

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات

تمارين (٥ ـ ٤)

١ إذا كان ص = م س + جـ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات ؛ فأكمل ما يأتى :

أ معادلة الخط المستقيم عندما م = ١ ، جـ = ٣ تكون على الصورة ....

ب معادلة الخط المستقيم عندما م = -٢ ، جـ = ١ تكون على الصورة ....

جـ معادلة المستقيم عندما م = ٣ ، جـ = ٠ تكون على الصورة ....

٢ أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات فى كل مما يأتى :

أ ٢س – ٣ص – ٦ = ٠ ب ٥ س + ٤ص – ١٠ = ٠ جـ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات الآتية :

أ ميله يساوى ٢ و يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

ب ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص-١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ .

جـ يمر بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١) .

د معادلة الخط المستقيم عندما م = صفر، جـ = صفر .

٤ ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية:

أ ميله يساوي $\frac{-١}{٢}$ و يقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوي وحدة واحدة.

ب ميله يساوي ٢ و يقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات.

جـ يقطع من الجزءين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزءين طوليهما ٢، ٣ من الوحدات على الترتيب.

٥ الجدول الآتي يمثل علاقة خطية.

س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	أ

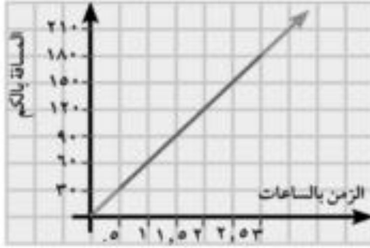
أ أوجد معادلة الخط المستقيم.

ب أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

جـ أوجد قيمة أ.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

٦ **الشكل المقابل**: يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التى تقطعها سيارة بالكيلومتر والزمن (بالساعة) الذى قطعت فيه هذه المسافة.



أوجد:

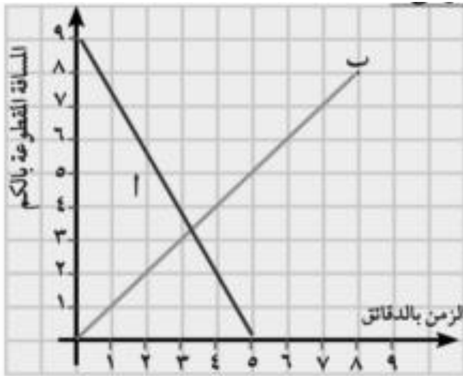
أ المسافة المقطوعة بعد ٩٠دقيقة.

ب الزمن الذى قطعت فيه السيارة ١٥٠ كيلو مترًا.

جـ سرعة السيارة.

د معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن

٧ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) بالكيلومترات والزمن (ن) بالدقائق لكل من الجسمين أ، ب:



أ هل بدأ أ ، ب الحركة في توقيت واحد؟

ب بعد كم دقيقة التقى أ، ب؟

جـ ما سرعة أ ؟

د اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب.

نشـــاط



١ في الشكل المقابل :

النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ (٤، ٣).

أولا : أكمل ما يأتى :

أ و أ = ... وحدة الطول

ب و ب = ... وحدة الطول

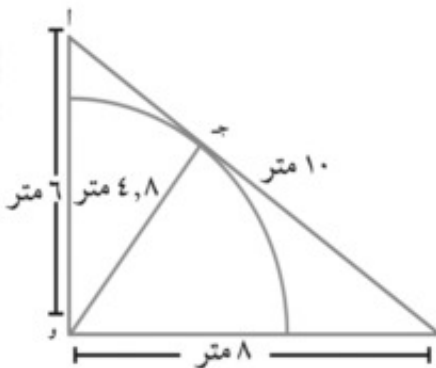
ثانيًا : اختر من المجموعة الأولى ما يناسبها من المجموعة الثانية :

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
أ ميل $\overleftrightarrow{أب}$	١-
ب ميل $\overleftrightarrow{وجـ}$	$\frac{-٣}{٤}$
جـ ميل $\overleftrightarrow{وأ}$	صفر
د ميل $\overleftrightarrow{وب}$	$\frac{٣}{٤}$
	١
	غير معرف

ثالثًا : أوجد إحداثيات النقط أ، ب، و ، ثم أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{جـو}$.

رابعًا : أوجدطول كل من $\overline{جـأ}$، $\overline{جـب}$، $\overline{جـو}$

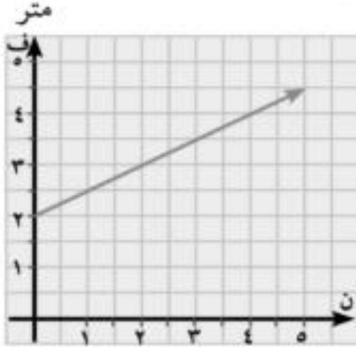
خامسًا: أثبت بأكثر من طريقة أن جـ مركز الدائرة المارة بالنقط أ، و، ب.



٢ ربطت بقرة عند نقطة و بحبل طوله ٤,٨ من المتر، فإذا كانت المساحة و أ ب مزروعة بالبرسيم، فاحسب مساحة الأرض المزروعة بالبرسيم التى لاتستطيع أن تأكلها البقرة. لأقرب متر مربع.

مطابع الشركة القومية للتوزيع

اختبار الوحدة



١ الشكل المقابل :
يمثل حركة جسيم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة (ف) مقيسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية ؛ أوجد :

أ المسافة عند بدء الحركة .
ب سرعة الجسيم .
جـ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم .
د المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .
هـ الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة.

٢ اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

أ المستقيم الذى معادلته ٢س – ٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله :
أ -٦ ب -٢ جـ $\frac{٢}{٣}$ د ٢

ب إذا كان المستقيمان ٣ س -٤ص -٣ = ٠، ك ص + ٤س -٨ = ٠ متعامدين فإن ك =
أ -٤ ب -٣ جـ ٣ د ٤

جـ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك تساوى :
أ -٢ ب -١ جـ ١ د ٢

د مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س -٤ص = ١٢، س = ٠، ص = ٠ يساوى :
أ ٦ ب ٧ جـ ١٢ د ٥

هـ $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٥، ٢)؛ أى من النقط التالية ∋ $\overleftrightarrow{أب}$
أ (١، ٦) ب (٢، ٣) جـ (٠، ٠) د (٣، -٤)

و إذا كان أ (٣، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (س، ص) فإن إحداثيى نقطة جـ التى تجعل △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب هى:
أ (٦، -١) ب (-٤، ٥) جـ (٣، -٢) د (٨، -٢)

٣ أ (٥، -٦)، ب (٣، ٧)، جـ (١، -٣)؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.

٤ أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١، ٣)، ب (٣، ٥) .

٥ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) و يوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠ .

٦ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، - ١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.

٨ أ ب جـ مثلث فيه أ (١، ٢)، ب (٥، - ٢)، جـ (٣، ٤)، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، رسم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ ؛ أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.

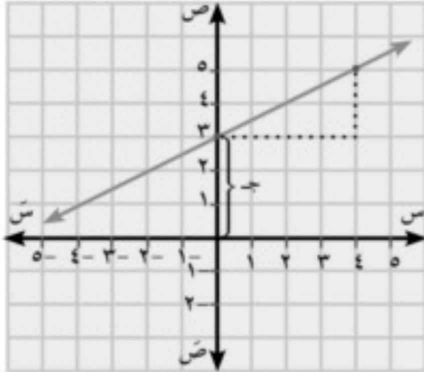
٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (٠، ٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (- ١، ٤)، (١، ٧).

١٠ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١)، (٦، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

١١ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور الصادات، حيث أ (س، ٧)، ب (٣، ٥) فأوجد قيمة س .

١٢ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // محور السينات، حيث جـ (٤، ٢)، د (- ٥، ص) فأوجد قيمة ص.

١٣ أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٢)، (٥، ١).



١٤ فى الشكل المقابل أوجد :

أ ميل الخط المستقيم (م) .

ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ).

جـ معادلة الخط المستقيم بمعلومية م، جـ .

د طول الجزء المقطوع من محور السينات .

هـ مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات .

تمارين متنوعة على الوحدات
ونماذج امتحانات

تمارين متنوعة على الوحدات و نماذج امتحانات

الجـــبر والإحصاء

تمارين على العلاقات والدوال

اولا : أكمل ما يأتى :

(١) النقطة (٥ ، – ٣) تقع فى الربع .....

(٢) إذا كان (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ ص + س) فإن ص = ...

(٣) إذا كان ن(س) = ٥ ، ن(س×ص) = ١٥ فإن ن(ص) = ...

(٤) النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور ......

(٥) إذا كان (٥ ، س – ٧) = (ص + ١ ، – ٥) فإن س + ص = ...

(٦) إذا كان س × ص = {(١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧)} فإن :

س = ... ، ص = ...

(٧) إذا كانت د(س) = ٥ س – ٧ فإن د(٣) = ...

(٨) إذا كانت د(س) = ٦ س فإن د(٢) + د(– ٢) = ...

(٩) إذا كانت د(س) = ٣ س + ب ، د(٤) = ١٣ فإن ب = ...

(١٠) الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٣ س يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (– ٤ ، .....)

(١١) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = س + ٧ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ......

(١٢) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢ س – ١ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ......

(١٣) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٤ س – ٥ فإن أ = ...

(١٤) إذا كانت د(س) = س – ٦ وكان $\frac{1}{3}$ د(أ) = – ٢ فإن أ = ...

(١٥) إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت د : س ← ح حيث د(س) = ٢ س + ١ فإن مدى د = ...

(١٦) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = ٢ – ٣س يمثلها خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ......

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د : س ← ص فإن س تسمى .... ، ص تسمى .....

(١٨) إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مدى الدالة د يكون ⊂ ......

(١٩) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣س - ١ يمثلها بيانيا مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢)

فإن أ = ...

(٢٠) إذا كانت (٢ ، - ٦) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ك س + ٨ فإن ك = ...

ثانيا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت ن(س^٢) = ٩ فإن ن(س) =

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٨١

(٢) النقطة (- ٣ ، ٤) تقع فى الربع :

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٣) إذا كانت س = {٥ ، ٦ ، ٧} فإن ن(س^٢) =

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٤) إذا كانت س × ص = {(١ ، ٣) ، (١ ، ٤)} فإن ن(س) =

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢

(٥) إذا كانت س {٥} ، ص = {٣} فإن ن(س × ص) =

(أ) ١٥ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ١

(٦) إذا كانت س = {٣ ، ٥ ، ٧} وكانت ع علاقة على س فإن العلاقة التى تمثل دالة من بين العلاقات الآتية هى :

(أ) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٧)} (ب) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

(جـ) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٥)} (د) ع = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧)}

(٧) إذا كانت النقطة (س ، ٧) تقع على محور الصادات فإن ٥س + ١ =

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٦

(٨) إذا كانت ع دالة من س إلى ص حيث س = {٢ ، ٥ ، ٨} ، ص = {٣ ، ٥} وكانت

ع = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (س ، ٣)} فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

(٩) إذا كانت ع دالة حيث بيان ع = {(٤ ، ٣) ، (٥ ، ٦) ، (٩ ، ٣)} فإن مدى الدالة ع هو :

(أ) {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩} (ب) {٤ ، ٥ ، ٩} (جـ) {٣ ، ٦ ، ٩} (د) {٣ ، ٦}

(١٠) إذا كانت د(س) = ٧س - $\frac{١}{٢}$ فإن د$\left(\frac{١}{٢}\right)$ =

(أ) ٧ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) ٣

(١١) إذا كانت د(س) = ٤ س + ب ، د(٣) = ١٥ فإن ب = ...

(أ) ١٥٦ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) - ٣

(١٢) إذا كانت (م ، ١٣) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٣س + ٤ فإن م =

(أ) ٦ (ب) - ٦ (حـ) ٣ (ء) - ٣

(١٣) إذا كانت (٢ ، ب) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٣س - ٦ فإن ب =

(أ) صفر (ب) ٧ (حـ) ٩ (ء) ٢

(١٤) إذا كانت د(س) = $س^٢$ + ٧ فإن د(٣) =

(أ) ١٠ (ب) ٧ (حـ) ٩ (ء) ١٦

(١٥) إذا كانت د(س) = $س^٣$ فإن د(٢) + د(- ٢) =

(أ) ١٦ (ب) صفر (حـ) - ١٦ (ء) ٤

(١٦) إذا كان (٢ ، - ٦) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ك س + ٨ فإن ك =

(أ) - ١٦ (ب) ٧ (حـ) - ٧ (ء) ٢

(١٧) الدالة د حيث د(س) = ٥ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (٠ ، ٠) (حـ) (٠ ، ٥) (ء) (٥ ، ٠)

(١٨) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٥س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب) فإن ب =

(أ) ٥ (ب) ٤ (حـ) ٣ (ء) ١٩

(١٩) إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مجال الدالة د هو .

(أ) س (ب) ص (حـ) س × ص (ء) ص × س

ثالثا : تمارين انتاج الإجابة :

(١) إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى أن " أ ضعف ب " لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب .

(أ) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . (ب) هل (٠ ، ٠) ∈ ع ؟

(حـ) هل ٢ ع ٤ ؟ (ء) أوجد س إذا كان ٦ ع س .

(٢) إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٨} ، ص = {٤ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " ب > ٢ أ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى .

(٣) إذا كانت س = {١٣ ، ١٤ ، ٤٣ ، ٨٤} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى أن " العدد أ له نفس رقم أحاد العدد ب " لكل أ ، ب ∈ س . أكتب بيان ع ومثلها على شبكة تربيعية .

(٤) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ — ب عدداً أولياً " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى .

(٥) إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {–٣ ، –٢ ، –١ ، ٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " العدد أ هو المعكوس الجمعى للعدد ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى . هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(٦) إذا كانت س = {٢ ، ٥ ، ٨} ، ص = {١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . حيث أ ع ب تعنى أن أ عامل من عوامل ب اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(٧) إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ + ب = ٧ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى . بين أن ع دالة واكتب مجالها ومداها .

(٨) إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى ؟ هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(٩) إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى أن " أ مضاعف ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ س . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى . هل ع دالة ولماذا ؟

(١٠) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} وكانت د : س ← ص حيث د(س) = ٩ – س . أوجد صور عناصر س بالدالة د وارسم مخطط بيانى للدالة .

(١١) إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت ع دالة على س وكان بيان ع = {(أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥)} فأوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب .

(١٢) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ – س^{2} فى الفترة [–٣ ، ٣] ومن الرسم عين :

<u>أولا</u> : إحداثى القيمة العظمى للدالة <u>ثانيا</u> : معادلة محور التماثل .

(١٣) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = س(٦ – س) – ٤ فى الفترة [–١ ، ٧]

(١٤) مثل بيانيا كلا من الدوال الخطية الآتية :

(أ) د(س) = ٣ س + ١ (ب) د(س) = ٢ – س

(حـ) د(س) = ٥ س (ء) د(س) = –٢س

(١٥) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٦ س – أ يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب .

(١٦) إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩ ، ٢٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى ب = ٢ أ – ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص .

(أ) اكتب بيان ع (ب) مثل ع على الشبكة التربيعية

(حـ) ما قيمة س إذا كان (س ، ٩) ∈ بيان العلاقة ع .

(١٧) إذا كانت س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} ، ص = {أ ∈ ط : ١٠ ≤ أ < ٥٠ } وكانت ع
علاقة من س إلى ص بيانها كالآتى : ع = {(٣ ، ١٥) ، (٥ ، ٢٥) ، (٧ ، ٣٥) ، (٩ ، ٤٥)}
(أ) ما مدى العلاقة ع (ب) اكتب قاعدة العلاقة ع .

(١٨) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = {١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى ان " أ = $\frac{1}{3}$ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع وبين
أنها دالة واكتب مداها .

(١٩) إذا كان بيان الدالة د = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١)} .
(أ) اكتب كلا من مجال ومدى الدالة د (ب) اكتب قاعدة الدالة د

(٢٠) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٦ س − أ
يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمة ٢أ + ٧ب

تمارين على النسبة والتناسب

[١] أكمل ما يأتى

(١) إذا كان ٣أ = ٤ب فإن أ : ب = ... : ...

(٢) إذا كانت ٣ ، ٤ ، حـ ، ٨ كميات متناسبة فإن حـ = ...

(٣) الوسط المتناسب بين ٣أ $ب^{٢}$ ، ٢٧ $أ^{٣}$ $ب^{٢}$ هو ....

(٤) إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٥}$ فإن $\frac{٣ س}{٥ ص}$ = ...

(٥) إذا كانت ٩ ، ٢س ، $\frac{١}{٢ص}$ كميات متناسبة فإن س ص = ...

(٦) إذا كان ٤$س^{٢}$ - ١٢س ص + ٩$ص^{٢}$ = ٠ وكانت س ، ص ∈ ح
فإن $\frac{س}{ص} = \frac{...}{...}$

(٧) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{حـ} = \frac{٣}{٥}$ فإن أ : ب : حـ = ... : ..... : .....

(٨) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٢}$ فإن $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{......}{......}$

(٩) $\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤} = \frac{......}{١١} = \frac{٢ص + ع}{..........}$

(١٠) إذا كانت ١ ، س ، ٩ ، ص فى تناسب متسلسل فإن :
س = ... ، ص = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الثالث المتناسب للعددين ٣ ، ٦ هو :

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (ج) ٩ (د) ١٢

(٢) إذا كانت : ٢ ، ٦ ، س ، س + ١٥ متناسبة فإن س تساوى :

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣) إذا كان أ ، ب ، ٢ ، ٣ متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب}$ تساوى :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٤) إذا كان $\frac{٩}{أ^{٢}} = \frac{٤}{ب^{٢}}$ (حيث : أ ، ب $\neq$ ٠) فإن $\frac{أ}{ب}$ تساوى :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\pm\frac{٣}{٢}$ (ج) $\pm\frac{٢}{٣}$ (د) $\pm\frac{٤}{٩}$

(٥) الثانى المتناسب للكميات ١٢ أ ب^{٢} ، ...... ، ٢١ أ ب ، ١٤ ب^{٢} هو :

(أ) ٨ أ ب^{٢} (ب) ٨ ب^{٣} (ج) ٢٤ أ ب (د) ٢٤ ب^{٤}

(٦) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$ فأى مما يأتى صحيحا .

(أ) $\frac{س}{ل} = \frac{ص}{ع}$ (ب) $\frac{س}{ع} = \frac{ل}{ص}$ (ج) $\frac{س}{ص} = \frac{ل}{ع}$ (د) $\frac{س}{ع} = \frac{ص}{ل}$

(٧) العدد الذى أضيف إلى مجموعة الأعداد الآتية ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ بالترتيب لتكون فى تناسب متسلسل هو :

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٨) إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن : $\frac{ب - أ}{ب + أ}$ تساوى :

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٩) إذا كان $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{٤س - ٢ص}{ع}$ فإن ع تساوى :

(أ) - ٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(١٠) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = م$ (حيث م $\in$ ع*) فإن : $\frac{أ ج هـ}{ب د و}$ تساوى :

(أ) م (ب) ٣ م (ج) م^{٣} (د) ٣ م^{٣}

[٣] إذا كانت المجموعات الآتية متناسبة فأوجد قيمة س .

(أ) ٨ ، س ، ٤ ، ٥ (ب) ١١ ، ٣ ، س ، ٦ (ج) ٦ ، ٢٤ ، ١ ، س

[٤] أوجد س : ص : ع فى كل مما يأتى :

(أ) $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٤}{٧}$ (ب) $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{س}{ع} = \frac{٣}{٧}$

[٥] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ فأوجد قيمة كل من النسب الآتية :

(أ) $\frac{أ + ب}{ب}$ (ب) $\frac{أ}{ب - أ}$ (ج) $\frac{ب - أ}{ب + أ}$ (د) $\frac{٧أ - ٢ب}{٣أ + ٢ب}$

[٦] إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{٢أ - ب}{م}$ فأوجد قيمة م .

[٧] إذا كانت : $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{ج}{د - ج}$ فأثبت أن أ ، ب ، ج ، د متناسبة .

[٨] إذا كانت ب هى الوسط المتناسب بين أ ، ج فاثبت أن :

(أ) $\frac{أ^٢}{ب^٢} + \frac{ب^٢}{ج^٢} = \frac{٢أ}{ج}$ (ب) $\frac{أ + ب + ج}{أ^{-١} + ب^{-١} + ج^{-١}} = ب^٢$

[٩] إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فاثبت أن :

(أ) $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢} = ٢س + ص$

[١٠] إذا كان : أ − ١ ، أ + ١ ، ب − ٢ ، ب + ٢ كميات متناسبة

أوجد $\frac{أ}{ب}$ ثم اثبت أن $\frac{أ + ب}{أ + ب - ٣} = \frac{٣أ}{٥أ - ب - ٣}$

[١١] إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{١}{٩}$ ، أ + ب + ج = ٢٦ فأوجد كلا من أ ، ب ، ج

[١٢] إذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فاثبت أن :

(أ) $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^٢ = \frac{٢س^٢ - ٣ص^٢}{٢ع^٢ - ٣ل^٢}$

(ب) $\sqrt[٣]{\frac{٥س^٣ - ٣ع^٣}{٥ص^٣ - ٣ل^٣}} = \frac{س + ع}{ص + ل}$

[١٣] إذا كانت $\frac{س + ص}{ل + م} = \frac{ص + ع}{م + ن} = \frac{ع + س}{ن + ل}$ فاثبت أن $\frac{س}{ل} = \frac{ص - س}{م - ل}$

[١٤] إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب − حـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢حـ − أ}}$

فاثبت أن : $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − حـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

[١٥] إذا كان : $\frac{\text{س + ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٨}}$ اثبت أن $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{س − ع}} = \text{٥}$

[١٦] أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٧ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ فإنها تكون متناسبة .

[١٧] عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ . فما هما العددان ؟

[١٨] أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

تمارين على التغير الطردى والعكسى

[١] أكمل ما يأتى

(١) إذا كانت ص = ٣ س فإن ص $\propto$ .....

(٢) إذا كانت س ص − ٧ = ٠ فإن ص $\propto$ ......

(٣) إذا كانت ص $\propto$ س وأخذ المتغير س القيمتين س_1 ، س_2 وأخذ المتغير ص القيمتين ص_1 ، ص_2 على الترتيب فإن $\frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} = \frac{......}{......}$

(٤) إذا كانت ص $\propto$ س ، وكانت س = ١ عندما ص = ٤ فإن ثابت التناسب = ...

(٥) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فإن ص = ... س

(٦) إذا كانت ص تتناسب عكسيا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = $\frac{1}{2}$ فإن ص = $\frac{.....}{\text{س}}$

(٧) إذا كانت $\text{س}^2 \text{ص}^2$ − ٤ س ص + ٤ = ٠ فإن ص $\propto$ ......

(٨) إذا كانت ص^2 − ٦ س ص + ٩ س^2 = ٠ فإن ص $\propto$ ......

(٩) إذا كانت ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ وأخذ المتغير س القيمتين س_1 ، س_2 وأخذ المتغير القيمتين ص_1 ، ص_2 على الترتيب فإن $\frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} = \frac{......}{......}$

(١٠) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ١ عندما س = ٤ فإن ص = ... عندما س = ٨

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) العلاقة التى تمثل تغير طردى بين المتغيرين س ، ص هى :

(أ) س ص = ٧ (ب) ص = س + ٢ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

(٢) إذا كانت ص تتناسب عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

فإن ثابت التناسب يساوى :

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٦

(٣) إذا كان ص − س = $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠ فإن :

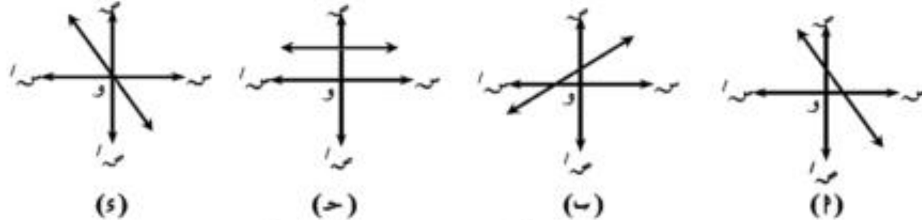
(أ) ص ∝ س + ١ (ب) ص ∝ س (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$

(٤) إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتغير بعدد المشتركين س فأى العلاقات الآتية صحيحاً .

(أ) ص = أ س (ب) ص = $\frac{أ}{س}$

(جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠) (د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

(٥) الشكل البيانى الذى يمثل التغير الطردى بين س ، ص هو :



[٣] بين أى من الجداول الآتية تمثل تغيراً طردياً وأيها تمثل تغيراً عكسياً وأيها لا تمثل تغيراً طردياً أو عكسياً مع ذكر السبب فى كل حالة .

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
٦	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
−٢	−٩
−١٨	١
٩	−٢

[٤] إذا كانت ص تتغير طرديا مع س ، وكانت ص = ١٠ عندما س = ٧ ، فأوجد س عندما ص = ٢٠

[٥] إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س ، وكانت ص = ١٠ عندما س = ٣ ، فأوجد ص عندما س = ٥

[٦] إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم اوجد قيمة ص عندما س = ١٤ .

[٧] إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت س = $٢\frac{٤}{٥}$ عندما ص = $\frac{٤}{٧}$ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = $٣\frac{١}{٥}$.

[٨] إذا كانت ص = ٣ + م وكانت م $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد ص عندما س = ٢

[٩] إذا كان ص = م + ٧ وكان م $\propto \frac{١}{س^٢}$ وكان م = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ٦ .

[١٠] إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت ان ص $\propto$ ع

[١١] من بيانات الجدول التالى أجب عن الأسئلة الآتية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

(أ) بين نوع التغير من حيث كونه طردى أو عكسى ؟ (ب) أوجد ثابت التناسب

(حـ) أوجد قيمة ص عندما س = ٣ (د) أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

[١٢] تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن فإذا سارت السيارة ٩٠ كم فى ساعة ونصف فاكتب العلاقة بين المسافة والزمن ثم أوجد المسافة التى قطعتها السيارة فى $٢\frac{١}{٢}$ ساعة .



[١٣] إذا كانت شدة الاستضاءة (ش) لمصباح تتغير عكسيا مع مربع بعد المصباح (ف) عن تلميذ يذاكر دروسه على بعد ١٢ متر ، فإذا كانت شدة الاستضاءة ضعيفة فما هو البعد الذى يوضع فيه المصباح حتى تزيد قوة الاستضاءة إلى أربعة أمثالها ؟

[١٤] إذا كان (ع) ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر قاعدتها (نق) وكان ع = ١٨ سم عندما نق = ٧ سم . أوجد ع عندما نق = ١٠,٥ سم .

[١٥] تتحرك سيارة كتلتها ٣ طن بسرعة منتظمة تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعتها فإذا كانت المقاومة ٦ ث كجم / طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٥٠ كم / س . أوجد سرعة السيارة إذا كانت المقاومة ٢٧ ث . كجم .



تمارين الإحصاء (جمع البيانات والتشتت)

أولا : أكمل ما يأتى :

(١) العينة الإحصائية هى جزء من ....

(٢) من اساليب جمع البيانات .... ، ....

(٣) الوسط الحسابى هو أحد مقاييس ...... ، بينما المدى هو أحد مقاييس ......

(٤) الفرق بين أكبر قيمة واصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ......

(٥) الوسط الحسابى لمجموعة قيم من المفردات يساوى ....

(٦) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(٧) المدى لمجموعة القيم ٥ ، ١٤ ، ٤ ، ٢١ ، ١٦ ، ١٢ هو ....

(٨) الانحراف المعيارى لمجموعة القيم ٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٨ ، ٣٠ يساوى ......

(٩) الفرق بين اكبر مفردة وأصغر مفردة لمجموعة من القيم يسمى ....

(١٠) إذا كانت ٧٨ هى اكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى يساوى ٣٩ فإن أصغر مفردات هذه المجموعة يساوى ....

ثانيا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة :

(أ) العشوائية (ب) الطبقية (حـ) العمدية (ء) العنقودية

(٢) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو :

(أ) المدى (ب) الوسط الحسابى (حـ) الوسيط (ء) الانحراف المعيارى

(٣) المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى :

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ١٢

(٤) الوسط الحسابى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى :

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٥) إذا كان مجـ $(س - \overline{س})^٢$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوى ٩ فإن σ =

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

ثالثا :أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] مدرسة بها ٣٦٠ طالبا و ٤٨٠ طالبة أرادت المدرسة عمل استبيان على عينة قوامها ٣٥ طالبا وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . أحسب عدد مفردات كل طبقة من العينة .

[٢] مصنع به ١٢٥ عاملا ، ٧٥ فنيا ، ٥٠ مهندسا ويراد أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ فردا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . أحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة .

[٣] الجدول التالى يمثل عدد الطلاب فى إحدى الكليات الجامعية .

الفرقة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
عدد الطلاب	٩٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠

وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٢٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة .

[٤] يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ١٠٠٠٠ مفردة ومقسم إلى طبقتين بيانها كالأتى :

الطبقة	الأولى	الثانية
عدد مفردات الطبقة	٣٠٠٠	٧٠٠٠

فإذا كانت عدد المفردات التى تمثل طبقة العينة الأولى ٩٠ مفردة ، فأوجد عدد المفردات الكلية التى تمثل العينة .

[٥] أحسب المدى لكل من البيانات التالية :

(أ) ٧ ، ١٦ ، ١٤ ، ٩ ، ٥ (ب) ١٣ ، ٩ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٢٩ ، ١٠

[٦] احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية :

(أ) ١٥ ، ٣٠ ، ٦ ، ١٨ ، ١٦ (ب) ٦٨ ، ٥٤ ، ٦٣ ، ، ٧٠ ، ٤٥

(جـ) ٧٠، ٦٤، ٦١، ٦٥، ٧٠، ٧٦، ٧٠

(د) ٢٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٦ ، ٨ ، ٩ ، ٣٧ ، ١٠

[٧] إذا كانت درجات طالب فى اختبار نصف العام لخمس مواد هى كما يلى :

٢٠ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ١٨ فأوجد الانحراف المعيارى .

[٨] إذا كانت المصاريف اليومية بعشرات الجنيهات لعينتين من الأسر فى مدينتين متجاورتين كما يلى :

العينة الأولى : ٢٤ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٣٢

العينة الثانية : ٢٧ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٦

اذكر مع ذكر السبب أى من العينتين السابقتين أكثر تشتتا ؟

[٩] الجدول التالى يبين درجات أحد الطلاب فى مادة الرياضيات خلال العام الدراسى

الشهور	اكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	فبراير	مارس	ابريل
الدرجة	٣٦	٤٠	٤٢	٣٨	٤٦	٤٤

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى .

[١٠] إذا كانت بيانات عدد من الأفراد فى ٥٠ أسرة كما يلى :

عدد الأفراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد أفراد الأسر .

[١١] احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية .

الفئة	٠ –	٢ –	٤ –	٦ –	٨ –
التكرار	٥	٩	١٥	١٥	٦

[١٢] فى دراسة لكمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات كانت النتائج فيما يلى :

عدد الكيلومترات لكل لتر	٢٥ –	٢٧ –	٢٩ –	٣١ –	٣٣ –
عدد السيارات	٥	٧	٩	٥	٤

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلومترات لكل لتر

[١٣] الجدول التالى يمثل عينة من منشأة صحية حسب عدد الأطباء فيها .

عدد الأطباء	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ – ٥٠
عدد المنشآت الصحية	٤	٤	٦	١٠	٦	٥	٤	١

أوجد الانحراف المعيارى .

نماذج امتحانات الجبر والإحصاء

النموذج الأول

[١] أكمل ما يأتى :

(١) من اساليب جمع البيانات ...... ، ......

(٢) إذا كان (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ص + س) فإن ص = ...

(٣) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{...... + ٣ جـ}{٥ ب + ...} = \frac{أ}{ب}$

(٤) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٤ فإن $\frac{ص}{س}$ = ...

(٥) إذا كان ن(س) = ٥ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن ن(ص) = ...

(٦) إذا أجاب أحمد على ٦٠٪ من أسئلة اختبار ما إجابات صحيحة، وكان عدد الأسئلة التى أجاب عنها خطأ هى عشرة أسئلة ، فإن عدد أسئلة الاختبار تساوى ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الرابع المتناسب للكميات ٣ ، ٦ ، ٦ هو :

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢) نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة :

(أ) ١ : ٢ (ب) ل : ٤ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

(٣) إذا كانت ٣ س ص = ٨ فإن :

(أ) س ∝ ص (ب) ص ∝ س (جـ) ٣ س ∝ ٨ ص (د) س ∝ $\frac{١}{ص}$

(٤) النقطة (- ٣ ، ٤) تقع فى الربع :

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٥) إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مدى الدالة ⊃ من :

(أ) س (ب) ص (جـ) س × ص (د) ع

(٦) إذا تم أخذ عينة طبقية قدرها ٥٠ ثلاجة لفحصها من بين ٢٠٠ ثلاجة من النوع (أ) ، ٣٠٠ ثلاجة من النوع (ب) ، فإن عدد مفردات النوع ب فى العينة يساوى :

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ٣٠

[٣] (أ) إذا كانت س = ع + ٨ وكانت ع تتناسب عكسيا مع ص وكانت ع = ٢ عندما ص = ٣ ، أوجد ص عندما س = ٣ .

(ب) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٧ ، ٢٥ فإنها تكون تناسباً متسلسلاً .

[٤] (أ) إذا كان $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٥} = \frac{حـ}{٣}$. أثبت أن $\frac{أ - ب + حـ}{أ + ب - حـ} = \frac{١}{٣}$

(ب) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ + ب عدداً غير أولياً " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص .
أكتب بيان ع ومثلها بخطط سهمى .

[٥] (أ) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} وكانت د : س ← ص حيث د(س) = ٩ - س . أوجد صور عناصر س بالدالة د .

(ب) الجدول التالى يمثل عدد الأطفال لـ ١٠٠ أسرة فى إحدى المدن .

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٦	١٥	٤٠	٢٥	١٤	١٠٠

أحسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى .

النموذج الثانى

[١] أكمل ما يأتى :

(١) المدى لمجموعة القيم ٨ ، ٥ ، ١٠ ، ٦ ، ١٤ هو ....

(٢) إذا كان العدد ٦ هو الوسط المتناسب الموجب ٢ ، أ فإن أ = ...

(٣) النقطة (٥ ، - ٣) تقع فى الربع ....

(٤) إذا كانت س = {٢ ، ٣} فإن $س^٢$ = ...

(٥) إذا كان $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س + ص}{ك}$ فإن ك = ...

(٦) قام المعلم بتصحيح أوراق تلاميذ أحد فصوله فى نصف ساعة ، فإذا أخذ المعلم ساعة ونصف فى تصحيح أوراق ١٢٠ تلميذاً ، فإن عدد تلاميذ هذا الفصل يساوى ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ابسط وأسهل مقياس للتشتت هو :

(أ) المدى (ب) الوسط الحسابى (حـ) الوسيط (ء) المنوال

(٢) إذا كان ٣ أ = $\frac{٥}{٦}$ ب فإن $\frac{أ}{ب}$ تساوى

(أ) $\frac{١٨}{٥}$ (ب) $\frac{١٥}{٦}$ (حـ) $\frac{٦}{١٥}$ (ء) $\frac{٥}{١٨}$

(٣) إذا كان (٣ ، ٥) ∈ {٣ ، ٦} × {س ، ٨} فإن س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (حـ) ٣ (ء) ٥

مطابع الشركة القومية للتوزيع

(٤) إذا كانت $س\sim = \{٥ ، ٦ ، ٧\}$ فإن $ن(س\sim^٢) =$

(أ) ٣ (ب) ٦ (حـ) ٩ (د) ١٢

(٥) إذا كانت النقطة (س ، ٧) تقع على محور الصادات فإن ٥س + ١ =

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٥ (د) ٦

(٦) مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى :

(أ) القاعدة (ب) المجال (حـ) المدى (د) المجال المقابل

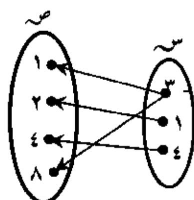
[٣] (أ) إذا كانت ص تتغير بتغير س وكانت $ص = \frac{٥}{٣}$ عندما $س = \frac{١}{٦}$ أوجد قيمة س عندما $ص = \frac{٣}{٤}$.

(ب) أوجد العدد الذى إذا طرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فإنها تكون تناسباً متسلسلا

[٤] (أ) إذا كان $\frac{س+ص}{٥} = \frac{ص+ع}{٣} = \frac{ع+س}{٦}$ فإثبت أن $\frac{س-ع}{٢} = \frac{س+ص+ع}{٧}$

(ب) إذا كانت $س\sim = \{١ ، ٢\}$ ، $ص\sim = \{٢ ، ٣ ، ٤\}$ فأوجد $س\sim \times ص\sim$.

[٥] (أ) المخطط السهمى المقابل يمثل علاقة ع



من المجموعة س~ إلى المجموعة ص~ حيث :

$س\sim = \{-٣ ، ١ ، ٤\}$ ، المجموعة $ص\sim = \{١ ، ٢ ، ٤ ، ٨\}$

أكتب بيان ع . هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(ب) أحسب الانحراف المعيارى للبيانات الاتية .

المجموعات	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٩	١٥	١٧	٢٥	٢٠	١٤

النموذج الثالث

[١] أكمل ما يأتى :

(١) الزوج المرتب $(س^٢ ، ص^٢)$ حيث $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ يقع فى الربع ....

(٢) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ...

(٣) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٤}$ فإن $\frac{٤أ}{ب} =$ ....

(٤) إذا كان : $ص^٢ - ٤سص + ٤س^٢ = ٠$ فإن ص ∝ ....

(٥) إذا كان س ، س + ٤١ عددان أوليان ، فإن س = ...

(٦) إذا كانت $س\sim = \{٢\}$ فإن $س\sim^٢ =$ ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الأول المتناسب للكميات : ٢١٠٠٠٠٠ ، ١٥ ، ٣٥ هو :

(أ) $\frac{٣}{٧}$ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(٢) إذا كانت ٤ $س^٢$ = ٩ $ص^٢$ فإن $\frac{س}{ص}$ تساوى :

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٢}{٣}$ (د) ± $\frac{٣}{٢}$

(٣) إذا كان : $\sqrt{٢}$ $\sqrt{٣}$ $\sqrt{٥}$ $\sqrt{٦}$ $\sqrt{٧}$ $\sqrt{٨}$ = ١٢ $\sqrt{٧٠}$

فإن : $\sqrt{٣}$ $\sqrt{٥}$ $\sqrt{٦}$ $\sqrt{٧}$ $\sqrt{٨}$ $\sqrt{١٠}$ يساوى :

(أ) ٦٠ $\sqrt{١٤}$ (ب) ١٢٠ $\sqrt{٧}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٧٠}$ (د) ٦٠ $\sqrt{٧}$

(٤) إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٠} فإن ن (س × ص) =

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٥) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ← ع

حيث د(س) = ٤ س − ٥ فإن أ تساوى :

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) أكثر المجموعات الآتية تشتتا هى المجموعة :

(أ) ٢٨ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠ (ب) ٣١ ، ٣٥ ، ٢٦ ، ٣٧ ، ٤١

(جـ) ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧ (د) ٢٠ ، ١٩ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٤٣

[٣] (أ) إذا كانت ٣ أ = ٢ ب . أوجد قيمة : $\frac{٣ أ - ب}{٢ أ + ب}$

(ب) إذا كات د(س) = $س^٢$ − س + ٣ فأوجد د(− ٢) ، د(١) ، د(٠)

[٤] (أ) إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع . أثبت أن : $\frac{س ع}{ص(ص + ع)}$ = $\frac{س}{س + ص}$

(ب) إذا كانت ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسيا مع مربع س ، وكانت ص = ١٧ عندما س = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد العلاقة بين ص ، س ، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢ .

[٥] (أ) إذا كانت ع علاقة على ط (مجموعة الأعداد الطبيعية) حيث أ ع ب تعنى " أ × ب = ١٨ " لكل أ ، ب ∈ ط . أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى .

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لمجموعة البيانات : ٧٣ ، ٥٤ ، ٦٢ ، ٧١ ، ٦٠

(جـ) عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ . فما هما العددان ؟

النموذج الرابع

[١] أكمل ما يأتى :

(١) الوسط الحسابى لمجموعة القيم ٤ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٣٠ يساوى ......

(٢) إذا كان $\frac{٣ أ - ٢ ب}{٧ أ + ٤ ب}$ = صفر فإن $\frac{ب}{أ}$ = ...

(٣) إذا كان هناك ٢٠٠ سعر حراري في ٥٠ جرام من أحد أصناف الطعام . فإن عدد السعرات الحرارية في ٣٠ جرام من هذا الطعام = ...

(٤) إذا كانت ١ ، س ، ٩ ، ص فى تناسب متسلسل فإن س = ... ، ص = ...

(٥) الدالة د حيث د(س) = $س^{٤}$ - ٢$س^{٣}$ + ٧ كثيرة حدود من الدرجة ....

(٦) إذا كان س ، ص كميتان متغيرتان ، وكان $\frac{س_{١} ص_{١}}{س_{٢} ص_{٢}}$ = ١ فإن ص ∝ ......

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٣}$ فإن $\frac{٣ أ}{٥ ب}$ يساوي :

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (حـ) ٣ (ء) ١٥

(٢) إذا كانت س = {٥ ، ٦ ، ٧} فإن ن($س^{٢}$) =

(أ) ٣ (ب) ٦ (حـ) ٩ (ء) ١٢

(٣) إذا كانت $ص^{٢}$ + ٤ $س^{٢}$ = ٤ س ص فإن :

(أ) ص ∝ س (ب) ص ∝ $س^{٢}$ (حـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (ء) ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

(٤) إذا كان ف عدداً فردياً فإن العدد الفردي التالى له هو :

(أ) $ف^{٢}$ (ب) $ف^{٢}$ + ف (حـ) ف + ٦ (ء) ف + ٢

(٥) إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية فى القيمة فإن :

(أ) $\overline{س}$ = ٠ (ب) σ = ٠ (حـ) س - $\overline{س}$ > ٠ (ء) س - $\overline{س}$ < ٠

(٦) إذا كان (٤ ، ٤) ∈ {٢ ، س} × {١ ، ٤} فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٨

[٣]

(أ) إذا كان $أ^{٢} ب^{٢} + \frac{١}{٤}$ = أ ب ، اثبت أن أ تتغير عكسيا مع ب

(ب) إذا كان $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{ب^{٢} + حـ^{٢}}{حـ^{٢}}$ فاثبت أن ب وسط متناسب بين أ ، حـ

[٤] (أ) أحسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية :

الفئة	٠ —	٢ —	٤ —	٦ —	٨ —
التكرار	٥	٩	١٥	١٥	٦

(ب) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ . أوجد ص عندما س = ١٤

[٥] (أ) إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ + ب عدداً فردياً " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص .

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . هل العلاقة دالة ؟ ولماذا ؟

(ب) إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديا مع وزنه على القمر (م) ،

فإذا كان $و_١$ = ١٨٢ كجم ، $م_١$ = ٣٥ كجم فأوجد $م_٢$ عندما $و_٢$ = ٣١٢ كجم .

النموذج الخامس

[١] أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت ٥ ، ص ، ٤ ، ١ كميات متناسبة فإن ص = ...

(٢) إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عندما س = ١٢

(٣) إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٢س − ٦ يمثلها بيانيا مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ......

(٤) إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم أ ، ٥ ، ٨ ، ٧ ، ٦ يساوى ٦ فإن أ = ...

(٥) الوسط المتناسب الموجب بين ٤ $أ^٢$ ، ٢٥ $ب^٤$ هو ....

(٦) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فإن : $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ ، س ، ب ، ٢س كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ تساوى :

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ١ : ٣ (د) ١ : ٤

(٢) إذا كانت النقطة (س − ٥ ، ٧ − س) تقع فى الربع الثانى فإن س =

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(٣) إذا كانت س = {٢} ، ص = {٠ ، ٤} فإن ن(س × ص) =

(أ) ٨ (ب) ٨٠ (جـ) ٦ (د) ٢

(٤) إذا كان بيان العلاقة ع هو {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ١) ، (٤ ، ٦)} فإن ع تمثل دالة مداها هو :

(أ) {٢ ، ٤ ، ٥} (ب) {١ ، ٣ ، ٦} (جـ) ط (د) ص

(٥) إذا كان التشتت لمجموعة من القيم يساوى صفرا فإنه يكون :

(أ) الاختلاف بين القيم يكون صغيرا (ب) الاختلاف بين القيم يكون كبيرا

(جـ) جميع المفردات تكون متساوية فى القيمة (د) الوسط الحسابى لها يساوى صفرا

(٦) لاحظ العلاقة بين الأعداد فى النمط : ٠,٧٥ ، $1\frac{1}{4}$ ، ١,٧٥ ، س ، $2\frac{3}{4}$ ، ....

فإن قيمة س تساوى :

(أ) ٢,٧٥ (ب) ٢,٥ (جـ) ٢,٢٥ (د) ٢

[٣] (أ) إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ ، فما قيمة المقدار $\frac{٢س + ص}{س + ٤ص}$

(ب) إذا كان $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٢ س ص$. اثبت أن س تتغير طرديا بتغير ص .

[٤] (أ) مثل بيانيا منحنى الدالة د حيث : د(س) = $(س - ٣)^٢$ متخذا س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى والصغرى للدالة .

(ب) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فأثبت أن :

$$\frac{أ ب - جـ د}{ب^٢ - جـ^٢} = \frac{أ + جـ}{ب}$$

[٥] (أ) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ - ب عدداً أولياً " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص .

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى .

(ب) إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم / ث عندما نق = ٣ سم . أوجد ع عندما نق = $١٥\frac{٣}{٤}$ سم .

تمارين للمراجعة على حساب المثلثات

[١] أكمل الجدول الآتى :

النسبة \ الزاوية	١٢َ ٤٢ْ	....	....	....
جا	....	٠,٣٢١٤	....	....
جتا	....	....	٠,٥٣٢١	....
ظا	....	....	....	٢,٠٦٢٥

[٢] أكمــــل ما يأتى

(١) ٢٤ً ٣٦َ ٤٦ْ = ... (بالدرجات)

(٢) ٤٤,١٢٥ْ = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)

(٣) إذا كان ظا هـ = ١,٤٢ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن ق(∠ هـ) = ...

(٤) إذا كان جا هـ = ٠,٦٣ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن ق(∠ هـ) = ...

(٥) إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق (∠ س) = ...

(٦) إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق (∠ س) = ...

(٧) جا ٦٠° + جتا ٣٠° − ظا ٦٠° = ...

(٨) جتا ٦٠° + جا ٣٠° − ظا ٤٥° = ...

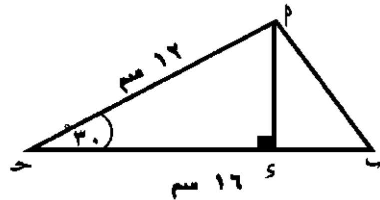
(٩) ٢ جا ٣٠° جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ...

(١٠) جا^{٢} ٣٠° + جتا^{٢} ٣٠° = ...

(١١) إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠ س) = ...

(١٢) إذا كانت ظا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق (∠ س) = ...

[٣] فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث أ ء ⊥ ب حـ ، أ حـ = ١٢ سم ،

ب حـ = ١٦ سم ، ق(∠ حـ) = ٣٠°

أكمل ما يأتى :

∵ جا ٣٠° = $\frac{أ ء}{.....}$ ∴ أ ء = ... × جا ٣٠° = ... سم

∵ مساحة (△ أ ب حـ) = ... × أ ء × ب حـ

∴ مساحة (△ أ ب حـ) = ... × ..... × ..... = ... سم^{٢} .

هل يمكنك إيجاد ارتفاع المثلث المرسوم من نقطة ب على أ حـ ؟ وضح بخطوات الحل

[٤] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) ٤ جتا ٣٠° ظا ٦٠° =

(أ) ٣ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (حـ) ٦ (ء) ١٢

(٢) إذا كانت جتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن قياس زاوية س تساوى :

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٦٠°

(٣) إذا كانت ظا $\frac{٣ س}{٢}$ = ١ حيث س زاوية حادة فإن قياس زاوية س تساوى :

(أ) ١٠° (ب) ٣٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٦٠°

(٤) ٢ظا ٤٥° − $\frac{١}{جتا ٦٠°}$ تساوى :

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ء) ١

(٥) إذا كانت جتا $\frac{س}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن جا س تساوى :

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٦) إذا كان ق($\angle$ أ) = ٨٥°، جا ب = جتا ب في Δ أ ب جـ فإن ق($\angle$ جـ) تساوى :

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

[٥] أوجد قيمة ما يأتى :

(١) (جتا ٣٠° - جتا ٦٠°) (جا ٣٠° + جا ٦٠°)

(٢) $\frac{١}{٤}$ جا^{٢} ٤٥° ظا^{٢} ٦٠° - $\frac{١}{٣}$ جا^{٢} ٦٠° ظا^{٢} ٣٠°

(٣) جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا^{٢} ٣٠°

(٤) $\frac{\text{جا٣٠° جتا٤٥° + جتا٣٠° جا٤٥°}}{\text{جا٤٥° جتا٦٠° + جتا٤٥° جا٦٠°}}$

[٦] أثبت أن :

(١) جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

(٢) ظا ٦٠° (١ - ظا^{٢} ٣٠°) = ٢ ظا ٣٠°

(٣) ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥° = ٤ جا ٣٠°

(٤) ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا٣٠°}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{٣٠°}}$

(٥) $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{٣٠° ظا٤٥° ظا}^{٢}\text{٦٠° + ظا٣٠° ظا٦٠°}}{\text{جا}^{٢}\text{٦٠° - ظا٤٥° جا٣٠°}}$ = ٨

[٧] أوجد قيمة س فى كل ما يأتى :

(١) س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°

(٢) س جا^{٢} ٤٥° = ظا^{٢} ٦٠°

(٣) ٤ س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥°

(٤) س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جتا^{٢} ٣٠°

(٥) س جا٤٥° جتا٤٥° ظا٦٠° = ظا^{٢} ٤٥° - جتا^{٢} ٦٠°

(٦) ظا س = $\frac{\text{جا٣٠° جتا٤٥° + جا٤٥° جتا٣٠°}}{\text{جا٤٥° جتا٦٠° + جا٤٥° جا٦٠°}}$

[٨] أوجد ق($\angle$ هـ) حيث هـ زاوية حادة .

(١) جا^{٢} ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠°

(٢) ٢ جا هـ = ظا^{٢} ٦٠° - ٢ ظا ٤٥°

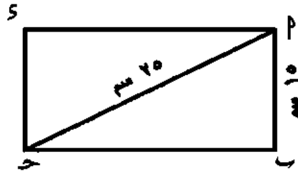
(٣) جا هـ = جا٤٥° جتا٣٠° + جتا٤٥° جا٣٠°

(٤) جا هـ جا^{٢} ٦٠° = ٣ جا^{٢} ٤٥° جتا^{٢} ٤٥° جتا ٦٠°

(٥) ظا هـ = ٣ (جا ٣٠° + جتا ٣٠°) - ٤ (جا^{٣} ٦٠° + جتا^{٣} ٦٠°)

(٦) ٣ ظا^{٢} هـ = ٤ جا^{٢} ٣٠° + ٨ جتا^{٢} ٦٠°

[٩] فى الشكل المقابل :

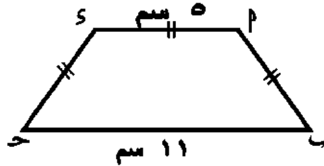


أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥ سم ، أ حـ = ٢٥ سم أوجد

أولا : ق(∠أ حـ ب)

ثانيا : مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء .

[١٠] فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

أ ب = أ ء = ء حـ = ٥ سم ، ب حـ = ١١ سم . أوجد :

أولا : ق (∠ب) ، ق (∠أ)

ثانيا : مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء .

تمارين للمراجعة على الهندسة التحليلية

أولا : أكمل ما يأتى :

(١) البعد بين النقطتين (٩ ، ٠) ، (٤ ، ٠) يساوى ....

(٢) البعد بين النقطتين (٠ ، – ١١) ، (٠ ، – ٥) يساوى ....

(٣) البعد بين النقطة (٤ ، – ٣) ونقطة الأصل تساوى ....

(٤) البعد بين النقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، – ١٢) يساوى ....

(٥) قطر الدائرة التى مركزها (٨ ، ٥) وتمر بالنقطة (٤ ، ٢) يساوى ......

(٦) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة فإن أ = ...

(٧) بعد النقطة (٣ ، – ٤) عن محور السينات = ... وحدة طول .

(٨) فى المربع أ ب حـ ء إذا كان أ (٢ ، – ٥) ، ب (– ١ ، – ١) فإن محيط المربع = ...

وحدة طول ومساحته = ... وحدة مساحة .

(٩) منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣) هى النقطة ...

(١٠) إذا (٢ ، ١) منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (٣ ، – ٤) ، ب (م ، ٦) فإن م = ...

(١١) إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ حيث أ (٥ ، – ٢)

فإن إحداثى ب = (... ، ...)

(١٢) إذا كان $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ وكان ميل $\overline{أ ب}$ = ٠.٧٥ فإن ميل $\overline{حـ ء}$ يساوى .....

(١٣) إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = ٠.٥ فإن ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يساوى .....

(١٤) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (– ٢ ، ٣) يساوى .....

(١٥) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن ك = ...

(١٦) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{حء}$ يوازى محور الصادات حيث حـ (م ، ٤) ، ء (- ٥ ، ٧)

فإن م تساوى .....

(١٧) ٱ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه ٱ (١ ، ٤) ، ب (- ١ ، - ٢) فإن ميل

$\overleftrightarrow{بحـ}$ يساوى ....

(١٨) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ٱ ، ٠) ، (٠ ، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية

قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدان فإن ٱ = ...

(١٩) إذا كان ص = م س + حـ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول

الجزء المقطوع من محور الصادات . فإن :

(ٱ) معادلة المستقيم عندما م = ١ ، حـ = ٣ هى ....

(ب) معادلة المستقيم عندما م = - ٢ ، حـ = ١ هى ....

(حـ) معادلة المستقيم عندما م = ٣ ، حـ = ٠ هى ....

(٢٠) **فى الشكل المقابل :**

حـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{ٱب}$.

(ٱ) وٱ = ... وحدة الطول

(ب) وب = ... وحدة الطول

(حـ) ميل $\overleftrightarrow{ٱب}$ = ... (ء) ميل $\overleftrightarrow{حـو}$ = ...

(هـ) ميل $\overleftrightarrow{ٱو}$ = ... (و) ميل $\overleftrightarrow{بو}$ = ...

(ز) حـ هى مركز الدائرة المارة بالنقط .... ، .... ، ....

(ع) مساحة Δ وٱب = ... وحدة مساحة

(ط) محيط Δ وٱب = ... وحدة طول

(ك) معادلة $\overleftrightarrow{ٱب}$ هى .... (ل) معادلة $\overleftrightarrow{حـو}$ هى ....

ثانيا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

(١) بُعد النقطة (٤ ، - ٣) عن محور السينات يساوى :

(ٱ) -٣ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٥

(٢) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٢ وحدة طول فأى من النقط الآتية

تنتمى للدائرة ؟

(ٱ) (١ ، ٢) (ب) (-٢ ، ١) (حـ) ($\sqrt{٣}$ ، ١) (ء) ($\sqrt{٢}$ ، ١)

(٣) إذا كانت (٤ ، - ٣) منتصف $\overline{ٱب}$ حيث ا (٣ ، - ٤) فإن إحداثى ب هى :

(ٱ) (٥ ، -٢) (ب) (٢ ، ٥) (حـ) (٥ ، ٢) (ء) (٣٫٥ ، - ٣٫٥)

(٤) المستقيم الذى معادلته ٢س - ٣ص - ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً

طوله : (ٱ) -٦ (ب) -٢ (حـ) $\frac{٢}{٣}$ (ء) ٢

(٥) إذا كان المستقيمان ٣ س – ٤ص – ٣ = ٠ ، ك ص + ٣ س – ٨ = ٠ متعامدان

فإن ك = ... (أ) -٤ (ب) -٣ (حـ) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = ٠ متوازيان فإن ك تساوى :

(أ) -٢ (ب) -١ (حـ) ١ (د) ٢

(٧) مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س – ٤ص = ١٢ ،

س = ٠ ، ص = ٠ يساوى :

(أ) ٦ (ب) ٧ (حـ) ١٢ (د) ١٥

(٨) $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) أى من النقط التالية ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

(أ) (١ ، ٦) (ب) (٢ ، ٣) (حـ) (٠ ، ٠) (د) (٣ ، -٤)

(٩) النقط (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٤) :

(أ) تكون مثلث منفرج الزاوية (ب) تكون مثلث حاد الزوايا

(حـ) تكون مثلث قائم الزاوية (د) تقع على استقامة واحدة

(١٠) إذا كان أ (٠ ، ٠) ، ب (٥ ، ٧) ، حـ (٥ ، هـ) رءوس المثلث أ ب حـ القائم الزاوية

فى حـ فإن هـ = (أ) صفر (ب) ٥ (حـ) ٧ (د) -٥

ثالثا : أجب عن الأسئلة الآتية

[١] أوجد طول $\overline{م ن}$ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) م (٢ ، -١) ، ن (٥ ، ٣) (ب) م (-٣ ، -٥) ، ن (٥ ، ١)

(حـ) م (٧ ، -٨) ، ن (٢ ، ٤) (د) م (٧ ، -٣) ، ن (٠ ، ٤)

[٢] أوجد إحداثى نقطة منتصف $\overline{أب}$ فى الحالات الآتية :

(١) أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠) (٢) أ (٧ ، -٥) ، ب (-٣ ، ٥)

(٣) أ (-٣ ، ٦) ، ب (٣ ، -٦) (٤) أ (٧ ، -٦) ، ب (-١ ، ٠)

[٣] إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س ، ص فى كل من الحالات الآتية :

أولا : أ (١ ، ٥) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (س ، ص)

ثانيا : أ (-٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، حـ (س ، -٣)

ثالثا : أ (س ، -٦) ، ب (٩ ، -١١) ، حـ (-٣ ، ص)

رابعا : أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، حـ (٤ ، ٦)

[٤] أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

قياسها : (أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠°

[٥] باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى

ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية :

(أ) م = ٠,٣٦٧٣ (ب) م = ١,٠٢٤٦ (حـ) م = ٣,١٦٤٨

[٦] اثبت ان النقط أ (٣ ، - ١) ، ب (- ٤ ، ٦) ، حـ(٢ ، - ٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة مركزها النقطة م(- ١ ، ٢) ، ثم اوجد محيط الدائرة

[٧] أوجد قيمة أ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (- ٢ ، ٣) يساوى ٥

(ب) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٣أ - ١ ، - ٥) يساوى ١٣

[٨] إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب حـ فأوجد قيمة س

[٩] إذا كانت النقط (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد أ .

[١٠] إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى $٢\sqrt{٥}$ فاحسب قيمة س

[١١] أى الحالات الآتية تكون فيها النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة مع ذكر خطوات الحل

<u>أولا</u> : أ (- ١ ، ٥) ، ب (٠ ، - ٣) ، حـ (٢ ، ١)

<u>ثانيا</u> : أ (- ٢ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٤)

<u>ثالثا</u> : أ (٠ ، ٢) ، ب (٤ ، ٨) ، حـ (٦ ، ١١)

[١٢] بين نوع المثلث الذى رءوسه النقط أ (- ٢ ، ٤) ، ب (٣ ، - ١) ، حـ (٤ ، ٥) من حيث أضلاعه ؟

[١٣] اثبت ان المثلث الذى رءوسه النقط أ(٥ ، - ٥) ، ب (- ١ ، ٧) ، حـ (١٥ ، ١٥) قائم الزاوية فى ب ، ثم أحسب مساحته .

[١٤] اثبت ان النقط (٥ ، ٣) ، (٦ ، - ٢) ، (١ ، - ١) ، (٠ ، ٤) هى رءوس معين ، ثم احسب مساحته .

[١٥] اثبت ان النقط أ(- ٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (- ٤ ، ٢) ليست على استقامة واحدة ، وإذا كانت ء (- ٩ ، ٤) فاثبت ان الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع .

[١٦] أ (٥ ، - ٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، - ٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$.

[١٧] أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠ .

[١٨] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزئين موجبين طولهما ٤ ، ٩ على الترتيب .

[١٩] إذا كانت أ (١ ، - ٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول .

[٢٠] اثبت أن النقط أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، - ٤) ، حـ (- ٤ ، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد احداثيى نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب حـ ء مستطيل .

[٢١] إذا كانت النقط أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، - ٣) ، حـ (- ١ ، - ٢) ، ء (- ٢ ، ٣) هى رؤوس معين . أوجد :

(أ) إحداثيى نقطة تقاطع القطرين . (ب) مساحة المعين أ ب حـ ء .

[٢٢] إذا كانت أ (- ١ ، - ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠) ، ء (٣ ، - ٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد . أثبت أن $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منها الآخر .
ما اسم هذا الشكل .

[٢٣] أ ب حـ ء متوازى اضلاع فيه أ (٣ ، ٤) ، ب (٢ ، - ١) ، حـ (- ٤ ، - ٣) . أوجد إحداثى ء . ثم أوجد إحداثى هـ بحيث يصبح الشكل أ ب حـ هـ شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ هـ = ٢ ب حـ .

[٢٤] إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ <u>أولا</u> : متوازيان <u>ثانيا</u> : متعامدان

[٢٥] أثبت باستخدام الميل أن النقط أ (- ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هى رءوس لمستطيل .

نماذج امتحانات الهندسة التحليلية وحساب المثلثات

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤) فإن إحداثيي نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى .....

(٢) المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (– ٢ ، ٣) معادلته هى .....

(٣) إذا كان س ، ص قياسى زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢

فإن جا س + جتا ص = ...

(٤) البعد بين النقطتين (٦ ، ٠) ، (– ٤ ، ٠) يساوي ....

(٥) إذا كانت النقطة (أ ، ٠) تنتمي للمستقيم ٣ س – ٤ ص + ١٢ = ٠ فإن أ = ...

(٦) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حء}$ = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت جتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ فإن ق (∠س) = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٦٠°

(٢) ميل المستقيم الذي معادلته ٢ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يساوي ....

(أ) $\frac{-٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (حـ) $\frac{٢}{٣}$ (ء) $\frac{٣}{٢}$

٣

(٣) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٥ ، ١٢) يساوي ......

(أ) ٥ (ب) ٧ (حـ) ١٢ (ء) ١٣

(٤) ظا٤٥° = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (حـ) ١ (ء) $\frac{١}{٢}$

(٥) فى المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب يكون جاأ + جتا حـ يساوى ......

(أ) ٢ جا أ (ب) ٢جا حـ (حـ) ٢جا ب (ء) ٢جتا أ

(٦) ظا ٤٥° جا ٣٠° = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (حـ) $\frac{٢}{٣}$ (ء) $\frac{١}{٤}$

[٣] (أ) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ حـ فأوجد النسب المثلثية للزاوية حـ

[٤] (أ) اثبت ان : جتا ٦٠° = جتا^{2} ٣٠° − جا^{2} ٣٠°

(ب) أ ب حـ ء متوازي اضلاع تقاطع قطراه فى هـ حيث أ (٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (١ ، ٧) أوجد :

أولا : إحداثيي كل من هـ ، ء ثانيا : طول $\overline{ءهـ}$

[٥] (أ) اثبت ان ظا ٦٠ = ٢ ظا ٣٠ ÷ (١ − ظا^{2} ٣٠)

(ب) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] اكمل ما يأتى :

(١) إذا كان المستقيمان ٢س + ب ص + ٣ = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ = متعامدان فإن ب = ...

(٢) إذا كان جا س = ٠,٥ حيث س زاوية حادة فإن ق (∠س) = ...°

(٣) البعد بين النقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، −١٢) يساوى ....

(٤) جا ٦٠° + جتا ٣٠° − ظا ٦٠° = ...

(٥) إذا كان المستقيمان : ك س − ٢ص + ٣ = ٠ ، ٦س + ٣ص − ٥ = متوازيين

فإن ك تساوي .....

(٦) ميل الخط المستقيم العمودي علي المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٦) ، (−٤ ، ١) يساوي ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠ =

(أ) جا ٦٠ (ب) جتا ٦٠ (حـ) ظا ٦٠ (ء) ٢ جا ٦٠

(٢) النقط (−٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠) هي رءوس مثلث

(أ) مختلف الأضلاع (ب) متساوى الأضلاع

(حـ) منفرج الزاوية (ء) قائم الزاوية ومتساوى الساقين

(٣) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ، يوازي محور السينات هى

(أ) س = −٢ (ب) ص = −٣ (حـ) س = ٢ (ء) ص = ٣

(٤) إذا كان المستقيم س + ٣ص −٦ = ٠ عموديا علي المستقيم أس − ٣ ص + ٧ = ٠ فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٩ (حـ) ٤ (ء) ١

(٥) النقطة (٠ ، ٤) تنصف البعد بين النقطتين (−١ ، −١) ، (س ، ص)

فإن النقطة (س ، ص) هي ....

(أ) (١ ، ٩) (ب) (−١ ، ٩) (حـ) ($\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) (ء) (−١ ، ٣)

(٦) Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم فيكون جا أ جتا ح = ...

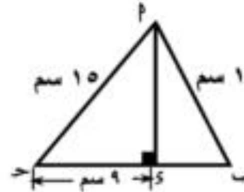
(أ) ١ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (ح) $\frac{١٢}{٢٥}$ (ء) $\frac{١٦}{٢٥}$

[٣] (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٦) ومنتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، - ٢) ، ب (٣ ، -٤) .

(ب) برهن علي صحة ان : جا^٣ ٣٠° = ٩ جتا^٣ ٦٠° - ظا^٢ ٤٥°

[٤] (أ) اثبت ان Δ أ ب ح الذي رؤوسه أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، ح (٢ ، -٣) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحة سطحه

(ب) في الشكل المقابل :



$\overline{أء} \perp \overline{ب ح}$ ، أ ب = ١٣ سم ، أ ح = ١٥ سم ، ء ح = ٩ سم

اوجد في أبسط صورة قيمة :

$$\frac{\text{ظا}(\angle \text{ح أ ء}) + \text{ظا}(\angle \text{ب أ ء})}{\text{ظا}(\angle \text{ح أ ء}) - \text{ظا}(\angle \text{ب أ ء})}$$

[٥] (أ) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) وعمودي علي المستقيم :
٥ س - ٢ ص + ٧ = ٠

(ب) أ ب ح ء شبه منحرف فيه $\overline{أء} // \overline{ب ح}$ ، ق ($\angle$ ب) = ٩٠° فإذا كان أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم ، ب ح = ١٠ سم فاثبت ان : جتا($\angle$ ء ح ب) - ظا($\angle$ أ ح ب) = $\frac{١}{٢}$

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] اكمل ما يأتي :

(١) جتا^٢ ٤٥° + ظا^٢ ٦٠° - جا ٣٠° = ...

(٢) إذا كانت أ (٢ ، - ١) ، ب (٥ ، ٣) فإن أ ب = ...

(٣) إذا كان $ل_١$: ك س - ٢ ص + ٤ = ٠ ، $ل_٢$: س + ٣ ص - ٧ = ٠ وكان $ل_١ \perp ل_٢$ فإن ك = ...

(٤) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = ...

(٥) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (- ٢ ، ٧) ويوازي محور الصادات هي ....

(٦) أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ فيه ظا ب = ١ فيكون ظا ح جا ح جتا ح = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ١ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) س = ١ (ب) ص = ١ (ح) ص = س (ء) ص = - س

(٢) إذا كان $\overleftrightarrow{ل م} \perp \overleftrightarrow{هـ و}$ ، هـ (– ١ ، ٢) ، و (٠ ، ٠) فإن ميل $\overleftrightarrow{ل م}$ يساوي .....

(أ) -٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣) إذا كان ظا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث (٣ س) حادة فإن ق (∠س) = ...°

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٤) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ وحدات فإن النقطة التي تنتمي للدائرة هى :

(أ) (٦ ، ٠) (ب) (٠ ، – ٦) (جـ) ($\sqrt{٨}$ ، ١) (د) (١ ، $\sqrt{٥}$)

(٥) فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ يكون جا ب + جتا ب ١

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) ≥

(٦) إذا كان جا س = $\frac{١}{٢}$ ، س زاوية حادة فإن جا ٢ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

[٣] (أ) اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط : ص (٢،٤) ، س (٨٠٠، ٦،) ، ع (– ٥ ، – ١)

قائم الزاوية فى ص .

(ب) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠سم ، ب جـ ١٢سم ، $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$ وتلقاها فى د

اثبت أن : أولا : جا ب + جتا جـ = ١.٤ ثانيا : جا^٢ جـ + جتا^٢ جـ = ١

[٤] (أ) أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة $\frac{جتا^٢ ٦٠° + جتا^٢ ٣٠° + ظا^٢ ٤٥°}{جا ٦٠° ظا ٦٠° - جا ٣٠°}$

(ب) مثل بيانيا وفى مستوي إحداثيي متعامد النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (– ١ ، – ١)

، جـ (٣ ، – ٤) ، د (٦ ، ٠) ثم أثبت إنها رؤوس مربع وأوجد مساحة سطحه.

[٥] (أ) أوجد قيمة س حيث ٠° < س < ٩٠° إذا كان

جا س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^٢ ٤٥° – جتا^٢ ٦٠°

(ب) مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله وحدتين أوجد :

أولا : معادلة المستقيم ثانيا : نقطة تقاطعه مع محور السينات .

النموذج الرابع

[١] اكمل ما يأتى :

(١) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ١) ، (٥ ، – ١) يساوى .....

(٢) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وعمودى على المستقيم ص = ٢س هى ......

(٣) قيمة المقدار : جا ٦٠° جتا ٣٠° – جتا ٦٠° جا ٣٠° = ...

(٤) إذا كان ظا ٣ س = ١ حيث ٣س زاوية حاده فإن قيمة س = ...°

(٥) ميل المستقيم العمودى على المستقيم ٣ س + ٤ ص − ٩ = ٠ يساوى ......

(٦) إذا كان جتا $\frac{س}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث $\frac{س}{٣}$ قياس زاوية حادة فإن قيمة س = ...°

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جا٢ ٦٠° − جتا٢ ٦٠° = .

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٢) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣ وحدات فالنقطة ...... تنتمي إليها

(أ) (١ ، ٢) (ب) (−٢ ، $\sqrt{٥}$) (جـ) ($\sqrt{٣}$ ، ١) (د) ($\sqrt{٣}$ ، ١)

(٣) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات يساوى ......

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير معروف

(٤) إذا كان ميل المستقيم أس − ص + ٣ = ٠ يساوى ١ فإن أ تساوى ......

(أ) $\frac{−١}{٢}$ (ب) −١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٥) البعد العمودى بين المستقيمين ص − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى ......

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٦) جا ٣٠° = جتا هـ حيث قياس زاوية حادة فيكون ق (∠ هـ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٠ (د) ٣٠

[٣] (أ) $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة التى مركزها م فإذا كانت ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧)

فأوجد <u>أولا</u> : إحداثى أ

<u>ثانيا</u> : طول نصف قطر الدائرة

<u>ثالثا</u> : معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة ب

(ب) أوجد قيمة س إذا جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° حيث ٠° < س < ٩٠°

[٤] (أ) أوجد قيمة : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب فى △ أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث أ ب = ١٠سم ، ب جـ = ٨ سم .

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (− ٣ ، ٢)

[٥] (أ) بدون استخدام الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار : جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° جتا ٣٠°

(ب) إذا كانت النقط أ (١ ، ٠) ، ب (− ١ ، ٤) ، جـ (٧ ، ٨) ، د (٩ ، ٤) فى مستوى احداثى متعامد فأثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل وأوجد طول قطره .

النموذج الخامس

[١] أكمل :

(١) إذا كان جا(ص+٧)° = ٠,٥ فإن ص = ...°

(٢) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٢) ويوازى محور السينات هى ......

(٣) البعد بين النقطة (٤ ، ٣) ونقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد يساوى ......

(٤) إذا كان م١ ، م٢ ميلى مستقيمين متعامدين فإن م١ × م٢ = ...

(٥) ٢ جا٣٠° جتا ٣٠° = جا .....°

(٦) المستقيم ص = س جا ٣٠ + حـ يمر بالنقطة (٤ ، ٦) فتكون حـ = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيين فإن ك =

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (حـ) $\frac{١}{٣}$ (ء) ٣

(٢) إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٣ ، -٥) ، ب(٥ ، ١) فإن مركز الدائرة هو .....

(أ) (٤ ، -٢) (ب) (٤ ، ٢) (حـ) (٢ ، ٢) (ء) (٨ ، -٢)

(٣) جا ٦٠° + جتا ٣٠° + ظا ٦٠° =

(أ) -$\sqrt{٣}$ (ب) ٣$\sqrt{٣}$ (حـ) $\sqrt{٣}$ (ء) ٢$\sqrt{٣}$

(٤) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة الطول فإن أ =

(أ) -١ (ب) صفر (حـ) ١ (ء) ± ١

(٥) المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ص) ، (٣ ، ٤) ميله يساوى طا ٤٥° فتكون ص =

(أ) ١ (ب) -١ (حـ) ٢ (ء) ٤

(٦) Δ س ص ع قائم الزاوية فى ع ، س ص = ٢٥ سم ، ص ع = ٧سم ، س ع = ٢٤سم

فتكون جا س + جا ص =

(أ) $\frac{٣١}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٧}{٢٥}$ (حـ) ٢ (ء) ١

[٣] (أ) إذا كانت معادلتى المستقيمين ل١ ، ل٢ هما على الترتيب : ٢س - ٣ص + أ = ٠ ،

٣ س + ب ص - ٦ = ٠ فأوجد :

أولا : قيمة ب التى تجعل ل١ ، ل٢ متوازيين .

ثانيا : قيمة ب التى تجعل ل١ ، ل٢ متعامدان .

ثالثا : إذا كانت النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم ل١ فأوجد قيمة أ .

(ب) بسبب الريح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ٤ أمتار فأوجد طول الشجرة لأقرب متر .

[٤] (أ) أثبت أن جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

(ب) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (س ، ٢) ، ب(٣،٨) جـ (٩ ، ١٠) ، د(٧ ، ٤) أوجد س

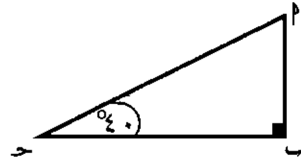
[٥] (أ) أثبت أن Δ الذى رؤوسه النقط أ (١ ، -٢) ، ب (-٤ ، ٢) ، جـ (١ ، ٦) متساوى الساقين .

(ب) في الشكل المقابل :

ق (∠ جـ) = ٤٠° ، أ جـ = ١٢سم .

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد

طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب سم .



المواصفات الفنية:

مقاس الكتاب :	$\frac{١}{٨}$ ٥٧ × ٨٢
طبع المتن :	٤ لون (٨٠ صفحة) ١ لون ٦٨ صفحة
طبع الغلاف :	٤ لون
ورق المتن :	٧٠ جرام أبيض
ورق الغلاف :	١٨٠ جرام كوشية
التجليد :	بشـــــر
عدد الصفحات بالغلاف :	١٤٨ صفحة



طبع بمطابع الشركة القومية للتوزيع